UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Entrenamiento de Paridad

Olimpiada de Matemáticas en Chiapas

Mayo del 2017

Introducción

Muchos problemas de la olimpiada de matemáticas se resuelven con un hecho que es muy fácil de visualizar, este hecho es que **"Todo número entero es par o impar"**. Tal vez al leer esto te sorprenda que este hecho resuelve muchos problemas, durante este entrenamiento se verá que esto combinado con otras herramientas resuelven problemas que en principio se ven difíciles.

Empezaremos observando los siguientes hechos fáciles de comprobar (se deja como ejercicio al lector):

- La suma de dos números pares es par.
- La suma de dos números impares es par.
- La suma de un número par con uno impar es impar.
- El producto de un número par por un entero cualquiera es par.
- El producto de dos impares es impar.

Para entender como se usa esto en la solución de ejercicios, veremos una serie de ejemplos que nos permitan entenderlo. Durante los ejercicios, diremos que dos números enteros tienen la misma paridad si ambos so pares o impares y diremos que tienen diferente paridad si uno es par y el otro es impar.

Ejemplos

Ejemplo 1. *Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamiento de 3, 5 y 7 kilómetros. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 kilómetros. ¿Podrá realizarlos en 10 sesiones?.*

No es posible, ya que en cada sesión debe nadar una cantidad impar de kilómetros y la suma de un número par de impares es par (se deja al lector que demuestre esto), por lo que nunca podrá ser 35.

Ejemplo 2. *Demuestra que un polígono cerrado que no se intersecta a si mismo y cuyos lados son verticales u horizontales, tiene un número par de lados.*

Le asignemos a cada lado del polígono la letra V o H según sea vertical u horizontal. Observemos que los lados se van alternando en horizontales y verticales, por lo tanto las letras se van alternando. También observemos que como el poligono es cerrado, si iniciamos en H debemos terminar en V, esto nos da como resultado que debe tener una cantidad par de lados.

Ejemplo 3. *¿Es posible dibujar una línea quebrada de 11 segmentos, cada uno de los cuales se intersecta exactamente con uno de los otros segmentos?*

No es posible. Si fuera posible, podriamos partir los segmentos en parejas de segmentos y solamente con uno, tendremos que los segmentos se agrupan en parejas y entonces el número de segmentos debe ser par, lo que da una contradicción.

Ejemplo 4. *Un gusano se desplaza verticalmente sobre un árbol. Cada día puede solamente subir o bajar. Si el primer día recorre 1 cm, el segundo día recorre 2 cm, y así sucesivamente. ¿Será posible que después de 17 días el gusano se encuentre en el lugar donde partió?*

No es posible, para ver esto, podemos dividir al conjunto $\{1, 2, \ldots, 17\}$ en dos conjuntos,$\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ y $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$, que corresponden a las veces que el gusano subio y bajo, respectivamente. Como queremos que llegue a la posición inicial, queremos que $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$, le llamemos X esa cantidad (el total que subio, que es igual al total que bajo). Por otro lado observemos que $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + b_1 + \ldots b_m = 1 + 2 + \cdots + 17 = 17 \cdots 9 = 153$ y por otro lado $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + b_1 + \ldots b_m = X + X = 2X153$, lo cual es absurdo.

Ejemplo 5. *Un poligono con un número par de lados se circunscribe a una circunferencia. Los lados se colorean alternadamente de rojo y negro. ¿Es la suma de las longitudes de los lados rojos igual a la suma de las longitudes de lados negros?.*

Sí son iguales. Al hacer el dibujo, se puede observar al tomar un vértice del poligono y los puntos de tangencia, que estas longitudes son iguales, como van alternados los colores, estas longitudes son iguales y de colores diferentes, al ser una cantidad par de lados, se tiene el resultado.

Ejemplo 6. *Prueba que la ecuación* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ *no tiene soluciones en los números naturales impares.*

Al hacer la suma de las fracciones obtenemos $\frac{abc+abd+bcd+cda}{abcd}=1$, que es equivalente a tener $abc+abd+bcd+cda=abcd$. Si esta ecuación tuviera soluciones con números naturales impares, llegariamos a una contradicción, pues el lado izquierdo sería par (suma de cuatro impares) y el lado izquierdo sería impar (producto de cuatro impares), lo cual no es posible.

Ejemplo 7. *Si 25 niñas y 25 niños se sientan alrededor de una mesa, demuestra que hay algún estudiante (puede ser niño o niña) que está sentado entre dos niñas.*

Si hay tres niñas juntas ya acabamos. Supongamos entonces que eso no sucede, es decir, pueden estar en parejas o solas. Le llamaremos bloque de niñas a las niñas que estan sentadas de manera consecutiva, es decir, un bloque consiste de 1 o dos niñas sentadas de manera consecutiva. Observemos que el mínimo número de huecos entre bloques debe ser 13 (acomodando en cada bloque 2 niñas y sólo un bloque con 1 niña). Por otro lado observemos queen cada hueco debe haber al menos dos niños, de lo contrario, este niño tendria dos niñas a sus lados (las niñas de los bloques). Por lo tanto habrian al menos 26 niños, lo cual no es posible.

Ejemplo 8. *Demuestre que en una gráfica el número de vértices de grado impar es un número par.*

Sean n el número de vértices, m el número de aristas y g_i el grado del vértice i. Observemos que la suma de los grados de todos los vértices es dos veces el número de las aristas. Por lo tanto:

$$2m=\sum_{i=1}^{n} g_i=\sum_{g_i \text{ es par}} g_i+\sum_{g_i \text{ es impar}} g_i.$$

De aqui observamos que $\sum_{g_i \text{ es impar}} g_i$ es par, esto significa que la cantidad de sumandos es par, obteniendo asi el resultado.

Ejemplo 9. *Una cuadrícula de* 3×3 *está inicialmente llena de ceros y unos de la siguiente manera: La cuadrícula se irá modificando con la siguiente regla: Cada que se coloque una cuadrícula de*

1	0	1
0	1	0
1	0	1

2×2 *sobre la cuadrícula original, se aumenta en 1 los números de los cuadros comunes. ¿Es posible, repitiendo la regla, llegar a un tablero de* 3×3 *donde todos los números sean pares?.*

Inicialmente la suma de todos los números de la cuadrícula es 5, que es impar. Cada vez que se aplica la regla de modificar la cuadrícula, la suma aumenta en 4 y entonces el nuevo número es tambien impar. Si al final se quiere que todos los números sean pares, la suma tendrá que ser par, pero ésto no es posible.

Ejercicios

Problema 1. a) ¿Puede intercalar símbolos "+" o "-" entre los números de tal manera que se de la igualdad?

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 = 0$$

b) ¿Puede intercalar símbolos "+" o "-" entre los números de tal manera que se de la igualdad?

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 = 0$$

c) ¿Puede intercalar símbolos "+" o "-" entre los números de tal manera que se de la igualdad?

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 = 13$$

Ejemplo 10. *Once segmentos se conectan formando una poligonal cerrada. ¿Puede una línea que no pase por uno de los vértices cortar a cada uno de los once segmentos?*

Problema 2. Pedro compró un cuaderno que contiene 150 hojas y numeró sus páginas del 1 al 300. Víctor desprende 25 hojas del cuaderno de Pedro y después suma los 50 números escritos en las páginas. ¿Puede Víctor obtener 2000 como la suma?.

Problema 3. Un grupo de n economistas y n políticos estan sentados alrededor de una mesa. Algunos de ellos siempre dicen la verdad y los otros siempre mienten. Se sabe que el número de economistas mentirosos es el mismo de políticos mentirosos. Cuando se les hace la pregunta: "¿qué es tu vecino de la derecha?" todos responden "político". Muestra que n es par.

Problema 4. Los números $1, 2, 3, \ldots, 2002$ se escriben en un pizarrón. Un alumno escoge dos de estos números, los retira, y coloca en el pizarrón la diferencia (no negativa) de ellos. Después de varias de estas operaciones queda escrito un solo número, ¿es posible que éste número sea cero?.

Problema 5. ¿Puede formar un cuadrado mágico de 3×3 con los primeros 9 números primos?

Problema 6. ¿Puede un caballo en un tablero de ajedrez partir de la esquina inferior izquierda y llegar a la esquina superior derecha, visitando cada una de las casillas del tablero una y solamente una vez?

Problema 7. Un poligono convexo de 11 lados tiene un eje de simetría, muestre que el eje pasa por uno de los vértices.

Problema 8. Un tablero de 8×8 está pintado de negro y blanco como tablero de ajedrez. Una tirada consta de intercambiar dos renglones o dos columnas del tablero. ¿se puede llegar, después de una sucesión de tiradas, a que el borde izquierdo del tablero sea blanco y el borde derecho sea negro?

Problema 9. Sobre una mesa se tienen 2017 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuántas con el lado rojo hacia arriba y cuántas con el lado negro hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes dos cosas:

- Retirar cualquier número de fichas, con la condición que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba
- Voltear cualquier número de fichas, con la condición que todas las fichas volteadas tengan el mismo color hacia arriba.

Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puede asegurar ganar, el primero en jugar o el segundo?.

Problema 10. El producto de 22 enteros es igual a 1. Muestra que su suma no puede ser cero.

Problema 11. En un tablero de 25×25 se colocan 25 monedas de manera que las posiciones son simétricas con respecto a una de las diagonales. Muestre que alguna moneda esta sobre tal diagonal.

Si las posiciones son simétricas con respecto a las dos diagonales, una de las monedas está en el centro del cuadrado.

Problema 12. ¿Será posible dividir la superficie de una esfera en un número impar de regiones triangulares?

Problema 13. Durante un congreso las personas van intercambiando saludos. Una persona será impar si intercambia un número impar de saludos y diremos que es par en caso contrario. Demuestra que en todo momento hay un número par de personas impares.

Problema 14. En la siguiente cuadrícula:

2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2

Una "sustitución" consiste en tomar el número en un cuadrado y sumarle o restarle un múltiplo par de alguno de sus vecinos. ¿es posible que después de varias sustituciones queden los números del 1 al 25 en la cuadrícula?

Problema 15. En cada casilla de un tablero de 15×15 se colocan números del conjunto $\{1, 2, \ldots, 15\}$ de manera que:

I) Casillas simétricas con respecto a una diagonal tienen el mismo número.

II) En cada renglón y en cada columna hay los 15 diferentes números.

Demuestre que no hay en tal diagonal dos números iguales.

Problema 16. Un ratón se quiere comer un queso en forma de cubo de la siguiente manera: Lo parte en 27 cubitos iguales de lados paralelos al cubo original y quiere ir comiendo cada cubito iniciando por un cubito de la orilla y terminando en el cubito central, además cada que come un cubito el siguiente cubito que se come es uno de los adyacentes (no en diagonal). ¿Podrá el ratón comerse el queso de esa manera?

Problema 17. Se escogen 45 puntos a lo largo de una línea AB, todos ellos fuera del segmento AB. Prueba que la suma de las distancias desde esos puntos al punto A no puede ser igual a la suma de las distancias desde esos puntos al punto B.

Problema 18. Las 28 fichas de dominó están acomodadas en una cadena, de manera que el número de puntos en los extremos unidos de un par de fichas adyacentes coinciden. Si uno de los extremos de la cadena es un número 5, ¿cuál es el número en el otro extremo de la cadena?