# Capítulo 1

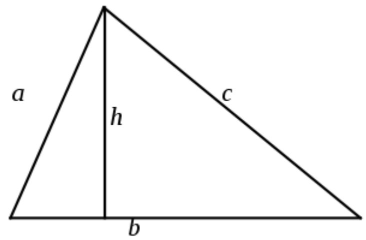
# Geometría

Estas notas tienen como fin preparar el lector para la resolución de problemas de Matemáticas tipo olimpiada. Por esta razón hay muy poca teoría y sí muchos problemas. En cada sección se presenta una pequeña introducción a un tema en particular y se sugiere al lector consultar otras fuentes en internet. Al final de cada tema vienen problemas seleccionados que tienen como fin retar el ingenio del lector.

Espero los disfruten y cualquier duda o aclaración comunicarse a *rosembergtoala@gmail.com.*

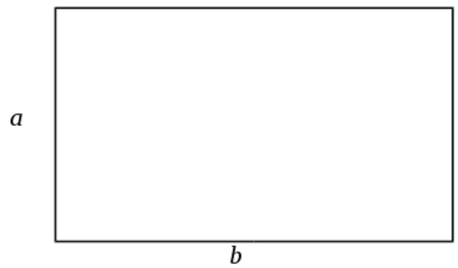
## 1.1. Perímetros y Áreas

Empezaremos recordando fórmulas de áreas y perímetros de las figuras geométricas más simples:



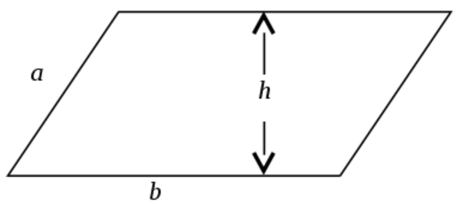

**Área** = (*base* x *altura*)/2
= ($b \times h$)/2

**Perímetro** = $a + b + c$



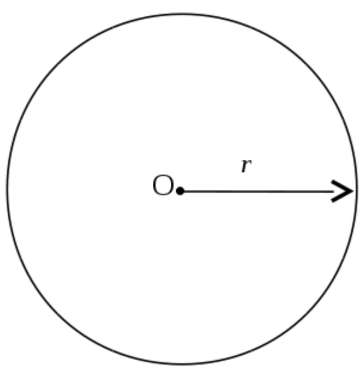

**Área** = *base* x *altura*
= $a \times b$

**Perímetro** = $2(a + b)$




**Área** = *base* x *altura*
= $b \times h$

**Perímetro** = $2(a + b)$

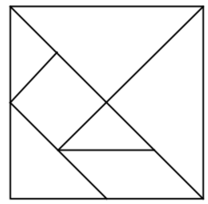



**Área** = π x (*radio*)$^2$
= $\pi \times r^2$

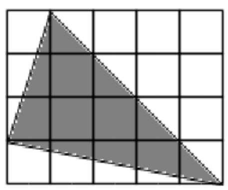
**Perímetro** = $2\pi \times r$

**Problemas.**

1. Calcula el área de cada uno de los pedazos del siguiente tangram de lado 12 cm.

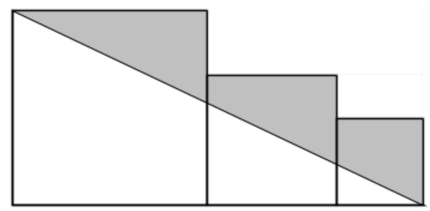


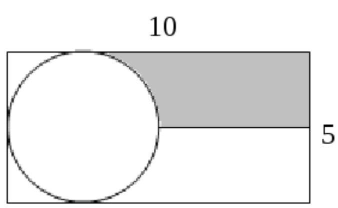
2. En los siguientes problemas, con la información dada, calcula el área de las regiones sombreadas.

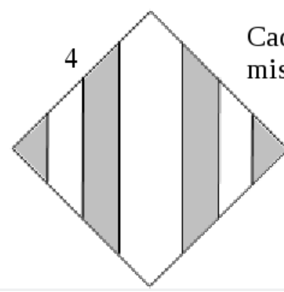
a) 

Donde cada cuadrito mide 1 cm de lado

b) Se tienen 3 cuadrados de lados 10, 8 y 6 respectivamente:

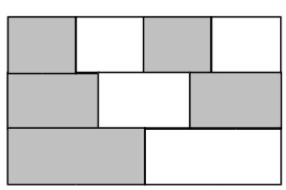


c) 

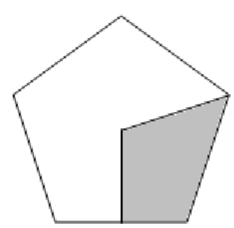

d) 

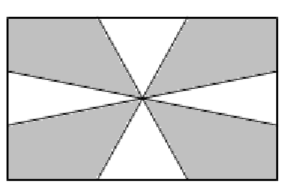

Cada franja es del mismo ancho

3. En los siguientes problemas calcula la razón *Área sombreada / Área Total*.

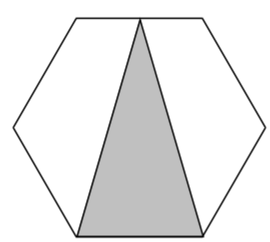
a) 

La primera franja se dividió en 4 partes iguales, la segunda en 3 y la tercera en 2.

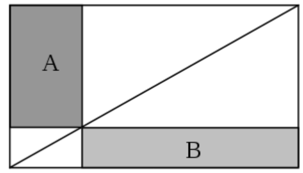
b) 

c) 

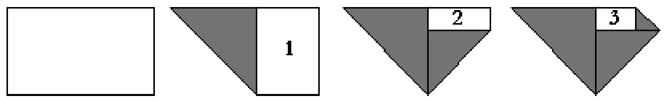
Cada lado del rectángulo se dividió en 3 partes iguales

d) 

4. En la siguiente figura, ¿qué área es mayor, A o B?




5. Se tiene una hoja de papel y se hacen 3 dobleces como se indica en la figura



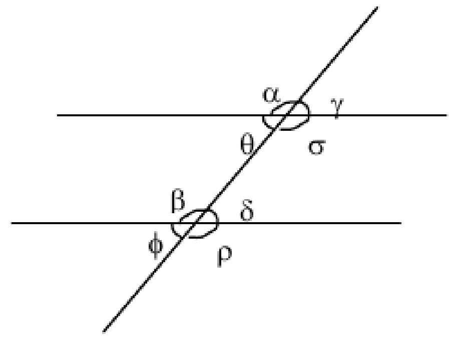

   Se sabe que el área del rectángulo blanco más chiquito (marcado con el número 3) es de 2 cm$^2$ y su perímetro 6 cm. ¿Cuál es el área de la hoja de papel?

6. Una vaca está amarrada a una esquina exterior de una casa cuadrada de 10 m de lado. Si la cuerda de la vaca mide 15 m, ¿cuál es el área total en que la vaca puede pastar?

## 1.2. Ángulos entre paralelas

***Cuando se tienen dos líneas paralelas y una recta que corta a ambas se cumplen ciertas igualdades de ángulos que son***

| | |
|---|---|
| Ángulos opuestos por el vértice | $\alpha = \sigma$, |
| Ángulos correspondientes | $\alpha = \beta$, |
| Ángulos alternos internos | $\alpha = \rho$, |
| Ángulos alternos externos | $\beta = \sigma$. |




Además observamos que $\alpha + \gamma = 180°$, es decir, son suplementarios.

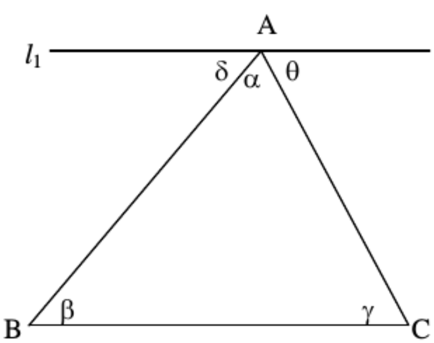
***Recíprocamente, si se tienen dos rectas cortadas por una transversal y los ángulos correspondientes son iguales entonces las rectas son paralelas.***

**Ejercicios.**

- ¿Qué otros ángulos son iguales en la figura?
- Un paralelogramo es un cuadrilátero con pares de lados opuestos paralelos. Muestra que los ángulos opuestos en un paralelogramo son iguales.

**Proposición 1.2.1** *La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es* $180°$.

**Demostración.** Llamemos a los vértices del triángulo $A$, $B$ y $C$ y los ángulos internos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ como se observa en la figura. Trazamos la línea $l_1$ que pasa por $A$ y es paralela al segmento $BC$, se forman los ángulos $\delta$ y $\theta$ marcados en la figura. Ahora observamos las siguientes igualdades de ángulos dadas por las paralelas:




| | |
|---|---|
| Ángulos alternos internos | $\beta = \delta$, |
| Ángulos alternos internos | $\gamma = \theta$. |

Como los ángulos $\alpha, \delta, \theta$ son suplementarios, se puede concluir que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

**Observación.** En un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales. Recíprocamente, si dos ángulos son iguales entonces los lados que subtienden son iguales.

**Ejercicios.**

- ¿Cuál es la medida de los ángulos interiores de un triángulo equilátero?
- Calcula la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera.

- Muestra que en cualquier triángulo el ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él.
- Un rombo es un cuadrilátero con todos sus lados iguales. Demuestra que todo rombo es también un paralelogramo.

**Problemas.**

1. ¿Cuál es el valor de $\alpha$ en la Figura 1?
2. En la Figura 2 $ABC$ es un triángulo; $BK = BL$, $KL = LM$, $KM = MC$ y $KC = AK$. Calcula la medida del ángulo $\angle BAC$ si el ángulo $\angle KBM = 52°$.
3. En la Figura 4, $ABCD$ es un cuadrado y $OBC$ es un triángulo equilátero, ¿Cuánto mide el ángulo $\angle OAC$?
4. En la Figura 3 las líneas $1_1$ y $l_2$ son paralelas y $\alpha + \beta = 160°$, ¿cuál es el valor de $\gamma$?
5. Calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera en términos del número de lados.
6. En el interior de un pentágono regular $ABCDE$ hay un punto $P$ tal que $PAB$ es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $BCP$?
7. En la Figura 5, cada uno de los ángulos marcados mide $140°$. Encuentra el valor del ángulo marcado con la letra $x$.
8. Sobre los lados $AB$ y $AC$ de un triángulo equilátero $ABC$ se construyen dos cuadrados $ABDE$ y $ACFG$ como se muestra en la Figura 6. Encontrar la medida del $\angle ADF$ .
9. En un triángulo $ABD$ con $AD = BD$ se escoge un punto $C$ sobre $BD$ de manera que $AB = AC = CD$. ¿Cuánto mide el $\angle ADC$?

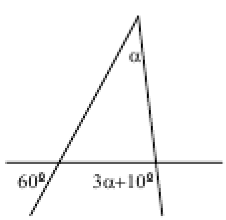


Figura 1

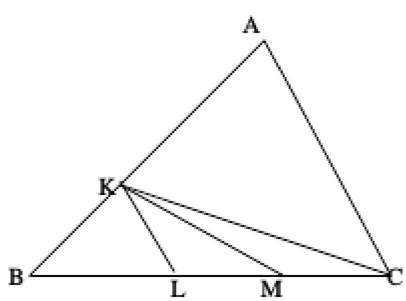


Figura 2

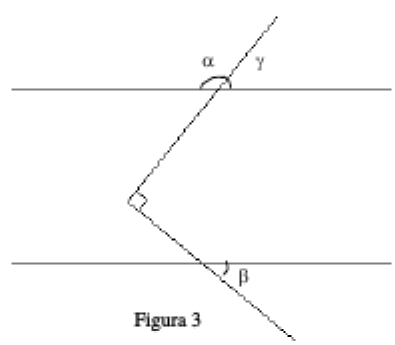


Figura 3

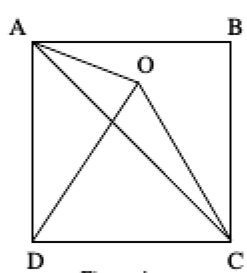


Figura 4

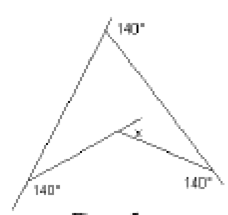


Figura 5

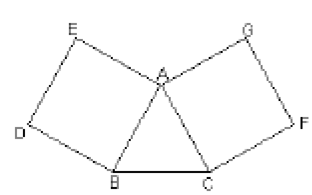


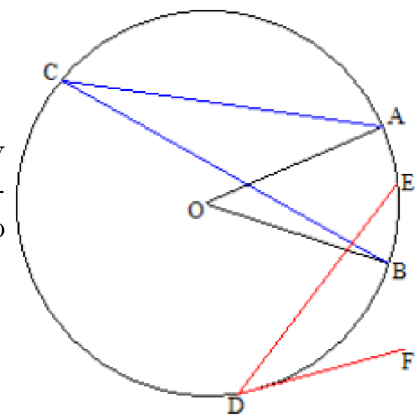
Figura 6

## 1.3. Ángulos en la circunferencia

**Definición 1.3.1** *Considera una circunferencia.*

- *Un* ángulo central *es aquel que tiene su vértice en el centro del círculo y sus lados son radios.*
- *Un* ángulo inscrito *es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas.*
- *Un* ángulo seminscrito *es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y uno de sus lados es tangente a ésta mientras el otro lado es una cuerda.*

Por ejemplo, en la figura, $\angle AOB$ es un ángulo central y decimos que abre al arco $AB$; $\angle ACB$ es un ángulo inscrito que abre al arco $AB$ y $\angle EDF$ es un ángulo seminscrito que abre al arco $ED$.




**Proposición 1.3.2** *Considera una circunferencia con centro en $O$, siempre se cumple que:*

1. *Un ángulo central mide el doble que cualquier ángulo inscrito que abra el mismo arco.*
2. *Una línea recta tangente a la circunferencia en un punto $P$ es perpendicular al segmento $OP$.*
3. *Un ángulo seminscrito mide la mitad que el ángulo central que abre el mismo arco.*

Algunas fuentes en internet donde puedes consultar más sobre este tema son:

- `https://www.youtube.com/watch?v=htIbCYFSyzk`
- `http://www.vitutor.com/geo/eso/ac_4.html`

**Ejercicios.**

- Muestra que si dos ángulos incritos abren el mismo arco entonces son iguales.
- Si AB es un díametro, ¿cuánto vale un ángulo inscrito que abre el arco AB?
- Justifica porqué un ángulo seminscrito mide lo mismo que un ángulo inscrito que abre el mismo arco.

- Un *ángulo interno* es un ángulo que se forma al intersectarse dos cuerdas en el interior de una circunferencia. Un *ángulo externo* es un ángulo que se forma al intersectarse (la prolongación de) dos cuerdas en el exterior de la circunferencia. Haz un dibujo de ambos casos y justifica las siguientes relaciones: a) Un ángulo interno es igual a la semisuma de los dos arcos que abre. b) un ángulo externo es igual a la semidiferencia de los arcos que abre.

**Problemas.**

1. En la Figura 1, el ángulo en $A$ mide 50°. ¿Cuánto mide $\angle ABC$?

2. En la Figura 2 los triángulos $ABC$ y $BCD$ son isósceles. Si el ángulo $\angle BAC = 30°$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle AEC$?

3. Considera una circunferencia. Se trazan dos rectas, una es tangente a la circunferencia y la otra es paralela a la primera y corta a la circunferencia en dos puntos. Muestra que los tres puntos que así se definen forman un triángulo isósceles.

4. En la Figura 3 el triángulo $ABC$ es rectángulo y la circunferencia de diámetro $AB$ corta al lado $BC$ en el punto $D$. Si se sabe que el triángulo $ADC$ es isósceles, ¿cuál es la medida del $\angle ABC$?

5. En la Figura 4 $AB$ es un diámetro que además es paralelo la cuerda $CD$. Además $CD = DB = 1$ cm. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

6. Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son tangentes exteriormente en un punto $A$, dos rectas que pasan por $A$ cortan a la circunferencia $\mathcal{C}_1$ en $B$ y en $C$; y a la circunferencia $\mathcal{C}_2$ en $D$ y en $E$. Demuestra que $BC$ es paralela a $DE$.

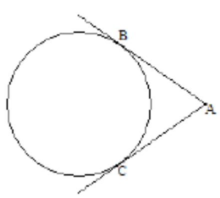



Figura 1

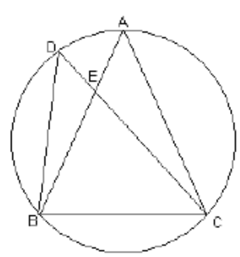



Figura 2

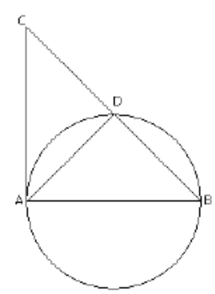



Figura 3

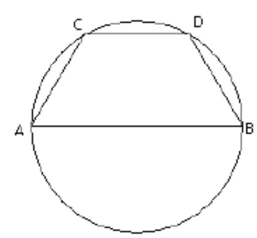



Figura 4

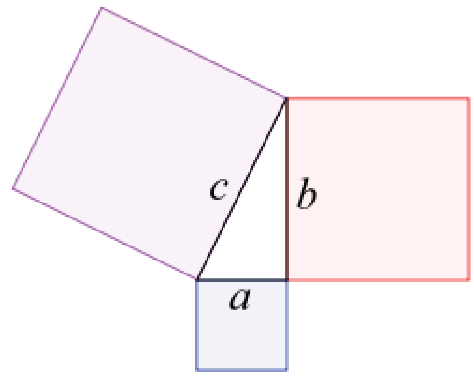
## 1.4. Teorema de Pitágoras

Ahora toca un resultado que se usa bastante en los problemas de geometría:

### Teorema de Pitágoras

***En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.***

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

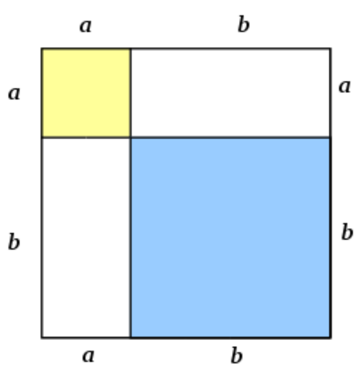


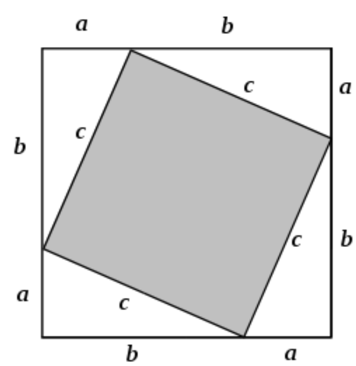

Geométricamente este teorema se puede interpretar de la siguiente manera: Si construimos un cuadrado sobre cada lado del triángulo rectángulo, entonces la suma de las áreas de los dos cuadrados chicos es igual al área del cuadrado más grande. Cabe recalcar que el enunciado recíproco también es cierto, esto es:

***Si en un triángulo se cumple la relación entre los lados*** $a^2 + b^2 = c^2$***, entonces es un triángulo rectángulo.***

En la siguiente página de internet se pueden consultar alrededor de ¡120 demostraciones del Teorema de Pitágoras! `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/`. Aquí nos concentraremos en una bastante simple que usa áreas.

**Demostración del Teorema de Pitágoras.** Vamos a calcular el área de un cuadrado de lados $a + b$ de dos maneras distintas basándonos en los siguientes diagramas



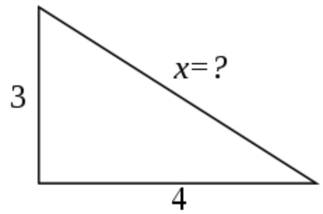



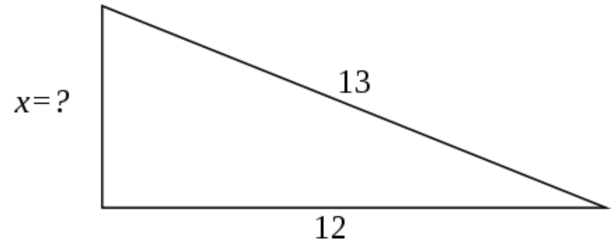

Por un lado el área total es $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Por otro lado el área total también es igual a $c^2 + 2ab$.

Al igualar estos dos resultados nos queda que $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

**Ejercicio.** En los siguientes dibujos calcula la longitud del lado que falta.




**Problemas.**

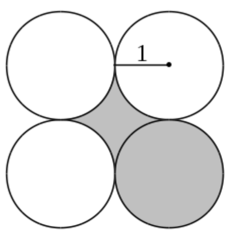
1. ¿Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero de lado 1? ¿Cuál es su área? ¿Y si el lado mide $l$?

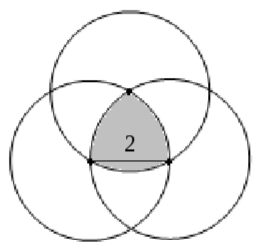
2. ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado 1?

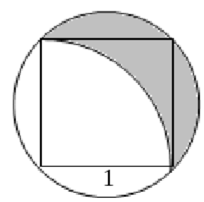
3. Usa los dos problemas anteriores para calcular los valores de seno y coseno para los ángulos 30°, 45° y 60°.

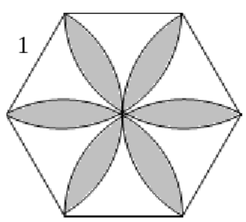
4. Si la longitud de la diagonal de un rectángulo es 29 metros y un lado mide 5 metros, ¿cuál es el área del rectángulo?

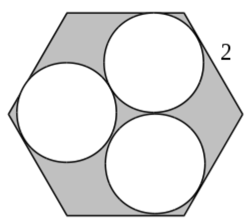
5. En los siguientes problemas, con la información dada, calcula el área de las regiones sombreadas.

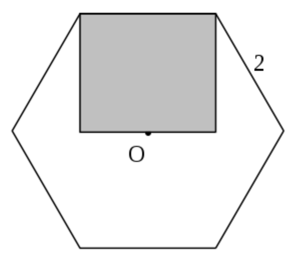
a) 

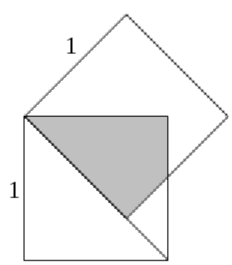

b) 

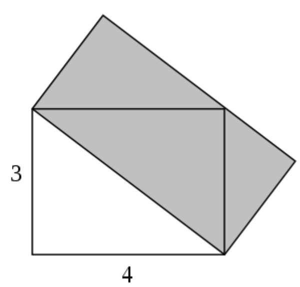

c) 


d) 


e) 


f) 


g) 


h) 

6. En la Figura 1 el diagrama el segmento $BC$ une los centros de los círculos, $AB$ es perpendicular a $BC$, $BC = 8$ y $AC = 10$. ¿Cuál es el perímetro del circulo pequeño?

7. En la Figura 2, calcula el área del cuadrilátero.

8. En la Figura 3: $AD = DB = 5$, $EC = 2AE = 8$ y $\angle AED = 90°$. Calcular la longitud de $BC$.

9. Tres círculos son tangentes a la línea $QR$ y entre sí como lo muestra la Figura 4. Los círculos grandes tienen el mismo radio. ¿Cuál es la razón entre el radio del círculo pequeño y el grande?

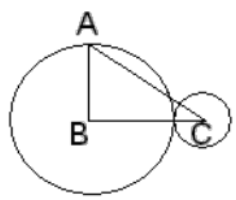


Figura 1

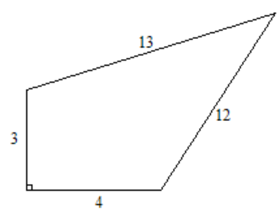


Figura 2

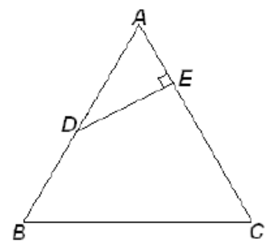


Figura 3

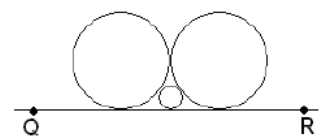
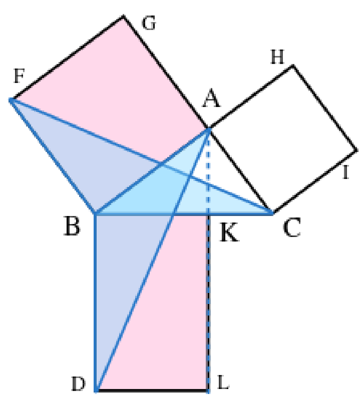


Figura 4

10. Sea $P$ un punto cualquiera y sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de radio $r$ y centro $O$. Desde $P$ se traza una recta que corta a esta circunferencia en los puntos $A$ y $B$. Demuestra que $PA \cdot PB = PO^2 – r^2$.
*Nota:* considera los casos en que P está dentro, sobre o afuera de la circunferencia. Cuando $P$ está adentro de la circunferencia el producto $PA \cdot PB$ se toma como negativo.

11. Haz otra demostración del Teorema de Pitágoras usando el siguiente dibujo.



## 1.5. Congruencia y Semejanza de triángulos

Ahora estudiaremos dos herramientas importantísimas para la resolución de problemas de geometría. Junto con el reconocimiento de angulos entre paralelas y en el círculo, la congruencia y la semejanza de triángulos son la base de toda la geometría plana que veremos.

### 1.5.1. Congruencia de triángulos

Aquí nos vamos a referir a dos triángulos congruentes cuando son iguales, es decir, tienen la misma forma y tamaño. Más formalmente:

**Definición 1.5.1** *Se dice que dos triángulos $ABC$ y $DEF$ son congruentes si los lados y ángulos correspondientes son iguales. Esto es si se cumplen las siguientes 6 igualdades:*

$$AB = DE, BC = EF, CA = FD, \angle ACB = \angle DFE, \angle ABC = \angle DEF \text{ y } \angle BAC = \angle EDF.$$

*La congruencia de triángulos se denota como $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.*

Afortunadamente, no es necesario corroborar las 6 igualdades anteriores para ver que dos triángulos son congruentes, sino que basta con solo tres:

1. *Criterio LAL.* Si dos triángulos tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre estos lados igual al correspondiente, entonces los triángulos son congruentes.

2. *Criterio LLL.* Si dos triángulos tienen sus tres lados iguales, entonces son congruentes.

3. *Criterio ALA.* Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales y el lado comprendido entre estos ángulos también igual, entonces son congruentes.

**Ejemplo.** Sea $ABC$ un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea $L$ un punto en el segmento $BC$, muestra que:

i) Si $L$ es punto medio de BC entonces $\Delta ALB \cong \Delta ALC$.

ii) Si $AL$ es perpendicular a BC entonces $\Delta ALB \cong \Delta ALC$.

iii) Si $AL$ divide al ángulo $\angle BAC$ en dos ángulos iguales entonces $\Delta ALB \cong \Delta ALC$.

**Solución.**

i) Por el criterio LLL de congruencia se sigue que $\Delta ALB \cong \Delta ALC$ ya que $AB = AC$, $BL = CL$ y $AL$ es común. Esto nos dice además que $\angle ALB = 90° = \angle ALC$ y que $AL$ divide al $\angle BAC$ en dos ángulos iguales.
La demostración de ii) y iii) se deja como ejercicio.

### 1.5.2. Semejanza de triángulos

Como su nombre lo indica decimos que dos ángulos son semejantes cuando son "parecidos", esto en el sentido de que tienen la misma forma pero posiblemente diferente tamaño. Más formalmente

**Definición 1.5.2** *Dos triángulos $ABC$ Y $DEF$ son semejantes si tienen sus tres lados correspondientes proporcionales y sus tres ángulos correspondientes iguales, es decir, si*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad y \quad \angle ACB = \angle DFE, \angle ABC = \angle DEF, \angle BAC = \angle EDF.$$

*Dos triángulos semejantes se denotan por $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ y a la proporción que guardan los lados se llama razón de semejanza.*

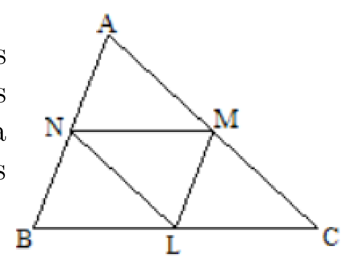
De nuevo tenemos tres criterios de semejanza parecidos a los de las congruencias.

1. *Criterio AA.* Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales entonces son semejantes.

2. *Criterio LAL.* Si dos pares de lados correspondientes de dos triángulos guardan la misma proporción y el ángulo comprendido entre estos lados es igual al correspondiente, entonces los triángulos son semejantes.

3. *Criterio LLL.* Si los tres pares de lados correspondientes de dos triángulos guardan la misma proporción entonces los triángulos son semejantes.

**Ejemplo.** En un triángulo $ABC$, sean $L$, $M$ y $N$ los puntos medios de los lados $BC$, $CA$ y $AB$ respectivamente. Uniendo los puntos medios se forman cuatro triángulos pequeños, muestra que los cuatro triangulitos son congruentes entre sí y semejantes al original en razón 1:2.




**Demostración.** Vamos a ver primero que los triángulos ANM y ABC son semejantes en razón 1:2. Tenemos que los lados correspondientes guardan la misma proporción pues

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2},$$

además tienen el ángulo en $A$ común, luego por el criterio de semejanza $LAL$ se tiene que $\Delta ANM \sim \Delta ABC$. De aquí también podemos concluir entonces que $\angle ABC = \angle ANM$, $\angle ACB = \angle AMN$ y $\dfrac{NM}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

De manera análoga se puede demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta MLC$ y $\Delta ABC \sim \Delta NBL$. Se deja como ejercicio al lector escribir explícitamente el razonamiento y sus conclusiones.

Ahora demostraremos que $\Delta LMN \sim \Delta ABC$. Ya sabemos de las semejanzas anteriores que

$$\frac{LM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{NL}{CA} = \frac{1}{2}.$$

Y por el criterio LLL se tiene entonces que $NML$ es semejante a $ABC$ en razón $1:2$. Ahora ya es fácil concluir que los 4 triangulitos son congruentes entre sí ¿por qué?$\square$

**Problemas.**

1. Recuerda que un paralelogramo es un cuadrilátero de tiene sus pares de lados opuestos paralelos. Muestra que:

   a) En un paralelogramo los lados opuestos son iguales y que las diagonales se cortan por sus puntos medios.

   b) Si dos segmentos son iguales y paralelos, entonces sus extremos forman un paralelogramo.

   c) Si dos segmentos se cortan por su punto medio, entonces sus extremos forman un paralelogramo.

2. Sobre los lados $AB$ y $AC$ de un triángulo $ABC$ se construyen hacia afuera dos triángulos equiláteros $PAB$ y $QAC$. Demuestra que $PC = QB$.

3. Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.

4. *Potencia de un punto a una circunferencia.* Considera una circunferencia $\mathcal{C}$ y cuatro puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ sobre ella de manera que $AC$ y $BD$ se intersectan en el interior de $\mathcal{C}$ en un punto $E$ y las prolongaciones de $AB$ y $CD$ se intersectan en un punto $F$ exterior a $\mathcal{C}$. Sea $T$ un punto sobre $\mathcal{C}$ tal que $FT$ es tangente a $\mathcal{C}$. Demuestra que

   *a*) $EB \cdot ED = EA \cdot EC$.

   *b*) $FA \cdot FB = FD \cdot FC = FT^2$.

5. Considera un trapecio cuyas bases miden $a$ y $b$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos en función de $a$ y $b$. Además demuestra que este segmento es paralelo a las bases y que también pasa por el punto medio de las diagonales.

6. *Teorema de la bisectriz.* Sea $ABC$ un triángulo y $D$ un punto sobre $AC$ de manera que $AD$ es bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Prueba que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

   Sugerencia: Traza la paralela a $AD$ por $C$.

7. Demuestra que en un trapecio los puntos medios de las bases, el punto de intersección de los lados no paralelos y el punto de intersección de las diagonales están todos alineados.

8. *Demostración del Teorema de Pitágoras usando semejanza.* Considera un triángulo rectángulo $ABC$ con ángulo recto en $C$, sea $D$ un punto sobre $AB$ tal que $CD$ es perpendicular a $AB$. Prueba que los triángulos $ABC$, $ADC$ y $CDB$ son semejantes. Usa estas semejanzas para probar que $AC^2 + CB^2 = AB^2$.