UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Entrenamiento de Principio de Casillas

Olimpiada de Matemáticas en Chiapas

Mayo del 2017

Introducción

La versión más simple del principio de las casillas es la siguiente:

"Si $n+1$ pelotas se van a acomodar en n cajas entonces al menos una caja tiene más de una pelota."

Esta simple afirmación tiene un poder impresionante y nos permite resolver muchos problemas de olimpiada, puede sur usado para demostrar teoremas profundos. El principio de las casillas también es llamado el Principio de Dirichlet o Principio del palomar.

La mayoría de las veces, este principio ayuda a resolver problemas de existencia; ayuda a garantizar si dentro de una serie de hechos hay la certeza de que alguna situación especial suceda. Este principio nos ayuda a garantizar la existencia de situaciones pero no nos da indicaciones de cómo llegar a esa situación. Una versión más general del principio de las casillas se puede enunciar como sigue:

"Si $nk + 1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar más de k objetos."

Para empezar a entender el principio de casillas, analicemos la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- En un grupo de tres personas, siempre hay dos del mismo sexo.
- En un grupo de trece personas, siempre hay dos que nacieron el mismo mes.
- En un grupo de 366 personas, siempre hay dos que cumplen años el mismo día del año (mes y día).

En estos ejemplos los objetos son las personas y las casillas son los dos sexos, los doce meses del año y los 365 días del año respectivamente.

Otros ejemplos menos triviales son:

- En un grupo de 17 personas, siempre hay 9 personas del mismo sexo.
- En un grupo de 37 personas, siempre hay 4 que nacieron el mismo mes.
- En un grupo de 4016 personas, siempre hay 12 que cumplen años el mismo día del año (mes y día).

Veamos el siguiente juego, donde la presencia del principio de las casillas no es tan claro: Dos jugadores escriben en una hoja blanca un número de dos cifras de manera alternada, pierde el jugador que escriba un número tal que al hacer todas las posibles diferencias positivas de los números escritos, exista una diferencia de dos dígitos iguales. ¿Existe alguna estrategia ganadora?, ¿cuál es el máximo número de jugadas que se pueden hacer antes de que pierda un jugador?.

Este juego es en realidad un problema de casillas, esto será fácil de ver al resolver el problema 1 en la lista de ejercicios. Para resolver los ejercicios, presentamos varios ejemplos de como aplicar el principio de las casillas.

Ejemplos

Ejemplo 1. *Una bolsa contiene bolas de dos colores: blanco y negro. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que hay que extraer de la bolsa, para garantizar que hay dos del mismo color? ¿Y para 10 del mismo color?*

Para este ejercicio, las casillas son los colores, es decir, hay dos casillas. para garantizar dos elementos en la misma casilla necesitamos extraer $2 + 1 = 3$ bolas. Para asegurar 10, necesitamos extraer $2 \cdot 9 + 1$ bolas.

Ejemplo 2. *Un millón de pinos crecen en el bosque. Se sabe que ningún pino tiene más de 600,000 agujas. Prueba que en el bosque hay dos pinos que tienen el mismo número de agujas. ¿Puedes asegurar que hay 3?*

Aqui tenemos 600,001 casillas (Casilla 1 los pinos con 0 agujas, casilla 2 los pinos con 1 aguja y asi sucesivamente). Con haber 600,002 pinos, ya aseguras dos con la misma cantidad de agujas. Para asegurar 3, necesitas $3 \cdot 600,001 + 1 > 1,000,000$.

Ejemplo 3. *Dados 12 enteros, prueba que se pueden escoger 2 de tal forma que su diferencia sea divisible entre 11.*

Dado un entero, al dividirlo entre 11 deja como residuo un número entre 0 y 10, es decir, el número es de la forma $11k + r$ con $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Aqui tenemos 11 casillas que son los residuos, al tener doce números, habrán dos con el mismo residuo, es decir, $11k_1 + r_0$ y $11k_2 + r_0$, por lo tanto su diferencia será $11(k_1 - k_2)$ la cual es divisible por 11.

Ejemplo 4. *El exámen de invitación a la olimpiada de matemáticas tiene 25 preguntas de opción múltiple con 4 posibles respuestas para cada pregunta. ¿Cuántos alumnos se necesitan para garantizar que hay dos de ellos con las mismas respuestas en todo el examen?*

Hay 4^{25} formas diferentes de resolver el examen, las casillas son las diferentes formas de resolver el exámen, para asegurar dos exámenes iguales, deben haber $4^{25} + 1$ alumnos.

Ejemplo 5. *Prueba que en cualquier grupo de 5 personas, hay al menos 2 que tienen el mismo número de amigos en el grupo.*

Cada persona puede tener 0, 1, 2, 3 o 4 amigos. Observemos que si hay uno que no tiene amigos, entonces no puede haber alguien que tenga 4 amigos. Por lo tanto, las casillas serán la cantidad de amigos que puede tener una persona, pero por la observación, sólo habrán 4 casillas, por lo tanto, al haber 5 personas seguramente hay dos de ellas con la misma cantidad de amigos.

Ejemplo 6. *Una línea recta que no pasa por algún vértice del un triángulo, no puede cortar a los tres lados del triángulo.*

La línea recta divide al plano en dos regiones, estas regiones serán nuestras casillas. Como el triángulo tiene tres vértices, habrán dos vertices en una región y por lo tanto el lado completo esta en esa región, es decir, la recta no divide a ese lado.

Ejemplo 7. *De cinco puntos dentro o sobre los lados de un triángulo equilátero de lado 2 hay dos cuya distancia entre ellos es menor o igual a 1.*

En este ejercicio, nosotros necesitamos definir las casillas. Las casillas las obtenemos dibujando los cuatro triangulos que resultan al trazar los segmentos que unen los puntos medios de los lados del triángulo, observemos que se forman 4 triángulos equilateros de lado 1, estos triángulos serán las casillas y por lo tanto, hay dos puntos dentro de un triángulo de lado uno y por lo tanto la distancia entre estos puntos es a lo más 1.

Ejemplo 8. *De entre cinco puntos del plano con coordenadas enteras hay dos cuyo punto medio tambien tiene coordenadas enteras.*

Hay que observar que el punto medio de los puntos (a, b) y (c, d) es $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}$. Observemos que la única forma de que $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{Z}$ con $x, y \in \mathbb{Z}$ es que ambos numeros sean pares o que ambos sean impares. Cada punto puede ser de una de las siguientes formas: $(P, P), (P, I), (I, P), (I, I)$, estas serán nuestras casillas, como son 5 puntos, seguro hay dos que tienen la misma forma y por lo tanto el punto medio tendrá coordenadas enteras.

Ejemplo 9. *Si a y b son enteros primos relativos entre si, demuestre que en la expresión decimal del número* $\frac{a}{b}$, *el periodo tiene a lo más* $b - 1$ *dígitos.*

Si al hacer la división en algún momento el residuo es cero, estaremos en el caso en que no hay período, es decir, el periodo tiene 0 dígitos. Supongamos que el residuo no es cero, entonces siempre habrá un residuo que puede ser $1, 2, \ldots, b - 1$. Primero obtenemos un residuo r_1, al continuar la división, vamos obteniendo otros residuos, como sólo hay $b - 1$ residuos y estamos en el caso en que a no es divisible por b, se tiene que en algún momento se repite el residuo y ahi comienza el período, obteniendo asi que a lo más se tiene un período con $b - 1$ dígitos.

Ejemplo 10. *Sea A un conjunto de 19 enteros diferentes elegidos dentro de la prograsión aritmética* $1, 4, 7, \ldots, 100$. *Muestre que hay dos enteros diferentes en A cuya suma es 104.*

Observemos que se pueden formar 16 parejas de números diferentes que sumen 104, estas son: $(4, 100), (7, 97), \ldots, (46, 58)$ y $(49, 55)$. Los números 1 y 52 no tienen pareja dentro de la progresión aritmética. Aqui tenemos 18 casillas, que son:

1	2	3	4	$\cdots$	17	18
$\{1\}$	$\{4, 100\}$	$\{7, 97\}$	$\{10, 94\}$	$\cdots$	$\{49, 55\}$	$\{52\}$

Al distribuir cada uno de los 19 números del conjunto A, habrá una casilla con dos números y no puede ser en las casillas 1 o 18. Por lo tanto, el par de números que están en la misma casilla son los números buscados.

Ejemplo 11. *En una gráfica con un número finito de vértices, hay dos vértices con el mismo grado. Recordemos que una gráfica es un conjunto de puntos llamados vértices y líneas llamadas aristas que unen dichos vertices, el grado de un vértice es el número de aristas que concurren en un vértice.*

Sea n el número de vértices en la gráfica. Observemos que el grado de un vértice puede ser alguno de los valores $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Por otro lado, observemos también que si un vértice tiene grado 0, no puede haber un vértice de grado $n - 1$, por lo tanto, las casillas son los n valores que pueden tomar grados de los vértices de la gráfica, pero solo estarán disponibles $n - 1$ casillas por la segunda observación, asi que hay al menos 2 vértices con el mismo grado.

Ejemplo 12. *En un conjunto de $n+1$ enteros positivos, todos ellos menores o iguales a $2n$, siempre hay dos elementos de manera que uno de ellos divide al otro.*

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los enteros positivos. Cada uno de estos enteros se puede escribir de la forma $a_i = 2^{m_i} \cdot b_i$, con $b_i \geq 1$ impar y $m_i \geq 0$. Como $B = \{b1, b_2, \ldots, b_{n+1}\}$ es un conjunto de $n + 1$ impares menores que $2n$ y como entre 1 y $2n$ hay solamente n impares, tenemos que hay dos elementos del conjunto B que son iguales, supongamos que son b_i y b_j. Ahora, si $m_i \leq m_j$, es claro que a_i divide a a_j, y si $m_i > m_j$, entonces a_j divide a a_i.

Ejemplo 13. *En un cuadrado de lado 4 se encuentran nueve puntos. Muestre que existen tres de ellos de manera que el triángulo que determinan tiene área menor o igual a 2.*

Al dividir el cuadrado en cuatro cuadrados de lado 2, se tiene por el principio de las casillas, que en alguno de estos cudrados pequeños hay 3 o más de los 9 puntos. Se deja como ejercicio verificar que si hay tres puntos en un cuadrado de lado 2, entonces el área del triángulo tiene área a lo más 2.

Ejemplo 14. *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n enteros no necesariamente distintos. Demuestra que siempre existe un subconjunto de estos números tal que su suma es divisible por n.*

Sean $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Si alguno de estos números es divisible por n, entonces ya terminamos, de lo contrario, hay dos que dejan el mismo residuo al dividir por n, digamos que s_i y s_j, suponiendo que $i > j$, tenemos que $s_i - s_j = a_i + a_{i-1} + \cdots + a_{j+1}$ es divisible por n.

Ejemplo 15. *Un Maestro del Ajedrez tiene 77 días para prepararse para un torneo. En su preparación, el quiere jugar al menos un juego por día, pero no más de 132 juegos en total. Demuestra que hay una sucesión de dias sucesivos en la cual juega exactamente 21 veces.*

Sea a_i el número de juegos jugados hasta el día i (inclusive). Entonces $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leq 132$. Por lo tanto tenemos que: $22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leq 153$. Entre los 154 números $a_1, \ldots, a_77, a_1 + 21, \ldots, a_{77} + 21$ hay dos números iguales, es decir, hay dos índices i, j tales que $a_i = a_j + 21$, entonces se han jugado exactamente 21 juegos los dias $j + 1, j + 2, \ldots, i$.

1. Ejercicios

Problema 1. Demuestra que de 12 números distintos de dos digitos, siempre hay dos cuya diferencia es un número de dos dígitos iguales.

Problema 2. Demuestra que en una fiesta siempre hay dos personas que conocen al mismo número de personas.

Problema 3. En un triángulo de área 4 se colocan 9 puntos. Muestra que hay tres de ellos que forman un triángulo de área menor o igual que 1.

Problema 4. Un triángulo equilatero de lado 1, no puede ser cubierto totalmente con dos triángulos equilateros de lados menores que 1.

Problema 5. Con los vértices de una cuadricula de 6×9, se forman 24 triángulos. Muestre que hay dos triángulos que tienen un vértice común.

Problema 6. En un triángulo equilatero de lado 3 se colocan 4 puntos. Muestre que hay dos de ellos a una distancia menor o igual a $\sqrt{3}$

Problema 7. En un cubo de lado 10 se colocan 999 puntos. ¿Es posible encontrar un cubo de lado 1 dentro del cubo de lado 10, que no contenga alguno de los puntos?

Problema 8. a) Pueden las casillas de un tablero de 3×3, llenarse con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, de manera que la suma de los números en cada renglón, en cada columna y en cada diagonal sean diferentes

b) Pueden las casillas de un tablero de 3×3, llenarse con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, de manera que la suma de los números en cada renglón y en cada columna sean diferentes

Problema 9. En el espacio se dan 9 puntos de coordenadas enteras y de forma que no hay tres colineales. Muestra que hay un punto de coordenadas enteras entre algún par de ellos.

Problema 10. Sean a, b, c y d enteros, muestre que $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ es divisible entre 12.

Problema 11. Entre tres o más enteros hay dos enteros i, j tales que $ij(i+j)(i-j)$ es divisible entre 10.

Problema 12. En un cuadrado de lado 1 se colocan 51 puntos. Muestre que hay 3 puntos que pueden cubrirse con un disco de radio $\frac{1}{7}$.

Problema 13. a) Los vértices de un pentágono se colorean de rojo y negro. Muestre que hay tres vértices que tienen el mismo color y que son vértices de un triángulo isósceles.

b) El mismo problema pero con vértices de un heptágono.

c) Encuentre coloraciones de los vértices del hexágono y del octágono con rojo y negro que no presenten triángulos osósceles con vértices del mismo color.

Problema 14. Cada cuadrito de un tablero de 3×7 es coloreado con alguno de dos colores (digamos blanco y negro). Muestre que en cualquiera coloración siempre hay un rectángulo del tablero que tiene los cuatro cuadritos de las esquinas coloreadas del mismo color.

Problema 15. Si seleccionamos $n+1$ enteros del conjunto $\{1, 2, \ldots 2n\}$, siempre hay dos de ellos tales que su máximo común divisor es 1.