Problemas Introductorios

para la

27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
María Luisa Pérez Seguí
Julio César Aguilar Cabrera
María Elena Aguilera Miranda

2013

Luis Miguel García Velázquez

Estudiante del Doctorado en Ciencias Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

María Luisa Pérez Seguí

Profesora-Investigadora, Esc. Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana

Julio César Aguilar Cabrera

Investigador Asociado,
Laboratorio Nacional de Informática Avanzada

María Elena Aguilera Miranda

Estudiante del Doctorado en Ciencias Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2014: la 55ª Olimpiada Internacional a celebrarse en Sudáfrica durante el mes de julio, la XXIX Olimpiada Iberoamericana que se llevará a cabo en septiembre en Honduras y la XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en Costa Rica en el mes de julio.

En la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1994. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2013-2014, y para el 1^o de julio del año 2014 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Todos los problemas que se incluyen en el problemario han formado parte de distintas etapas del Canguro Matemático Mexicano. Los primeros treinta problemas que aparecen en esta publicación formaron parte del Examen del Nivel Olímpico y están pensados para ser resueltos en un lapso de 3 horas, como examen eliminatorio. Los siguientes quince problemas formaron parte de exámenes de otros niveles y, aunque pueden variar en la dificultad, no requieren más teoría que la de una etapa eliminatoria. Los últimos quince problemas corresponden a una segunda fase de concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico; en esta última sección se incluye una selección de los problemas que formaron parte de los Exámenes Semifinales durante los últimos 4 años.

La Olimpiada de Matemáticas es un proyecto que se nutre del trabajo generoso y desinteresado de profesores y exolímpicos que dedican su tiempo a labores académicas y administrativas. Este año el Comité Organizador hace una mención muy especial de la labor de los profesores Miguel Angel Moreno Nuñez y José Luis Morales Cuevas, quienes fueran delegados de Sonora y Oaxaca, respectivamente. Ambos fallecieron durante el año de 2012. El Comité Organizador lamenta profundamente su pérdida y, en agradecimiento, les dedica la presente publicación.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el estado de Hidalgo durante el mes de noviembre de 2013. En él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2014. También se aplicarán exámenes para determinar quiénes representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

Durante el mes de abril se distribuyen los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página

`http://canguro.deltagauge.info/`

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí y Guanajuato.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Iberoamericanas, Internacionales y de Centroamérica y el Caribe han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kasajistán	97	33
2011	Holanda	101	22
2012	Argentina	100	31

En 2012, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron un reconocimiento. Ellos fueron: Diego Alonso Roque Montoya de Nuevo León (oro), Adán Medrano Martín del Campo de

Jalisco (plata), Jorge Garza Vargas del Distrito Federal (bronce), Julio César Díaz Calderón de Oaxaca (bronce), Jorge Ignacio González Cázares de Jalisco (mención) y Juan Carlos Ortiz Rhoton de Jalisco (mención). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 2 medallas de oro, 10 medallas de plata, 47 medallas de bronce y 31 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1
2012	Bolivia	19	6

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2012 obtuvieron medalla: una de plata (Julio César Díaz Calderón de Oaxaca) y tres de bronce (Adán Medrano Martín del Campo de Jalisco, Juan Carlos Ortiz Rhoton de Jalisco y Enrique Chiu Han del Distrito Federal). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 20 medallas de oro, 37 medallas de plata, 31 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1
2012	El Salvador	12	1

En la XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo dos medallas de oro (Enrique Chiu del Distrito Federal y Juan Carlos Ortiz de Jalisco) y una de plata (Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán) ubicándose así la delegación nacional en primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, México ha obtenido 25 medallas de oro, 14 de plata y 3 de bronce.

Resultados en el Concurso Nacional de la 26a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2012 se llevó a cabo en Guanajuato, Guanajuato, el 26º Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 17 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Erick Rosete Beas (Baja California),
Luis Enrique Chacón Ochoa (Chihuahua),
Luis Carlos García Ramos (Chihuahua),
Enrique Chiu Han (Distrito Federal),
Joshua Ayork Acevedo Carabantes (Guanajuato),
Ramón Iván García Alvarez (Guanajuato),
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco),
Diego Terán Ríos (Morelos),
José Alberto De la Paz Espinosa (Nayarit),

Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León),
Raúl Arturo Hernández González (Nuevo León),
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León),
Demián Espinosa Ruiz (San Luis Potosí),
Carlos Alejandro Hernández Gómez (San Luis Potosí),
Axel Omer Gómez Cásarez (Sonora),
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán).

Los 8 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán),
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León),
Jorge Pat De la Torre Sánchez (Coahuila),
Pablo Meré Hidalgo (Querétaro),
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos),
Antonio López Guzmán (Chihuahua),
Juan Luis García Guerrero (San Luis Potosí),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 26º Concurso Nacional:

1. Jalisco
2. Nuevo León
3. San Luis Potosí
4. Morelos
4. Yucatán
6. Guanajuato
7. Distrito Federal
6. Chihuahua
9. Baja California
10. Sonora

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Estado de México. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Coahuila y Guerrero.

Material de estudio e información sobre la Olimpiada.

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

`http://www.ommenlinea.org`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Enero 2013

Enunciados de los problemas

Problema 1. Si quiero comprar cuatro barras de chocolate en lugar de sólo una, debo pagar \$60 extra. ¿Cuál es el costo de cada barra de chocolate?

(a) \$20 (b) \$25 (c) \$30 (d) \$40 (e) \$50

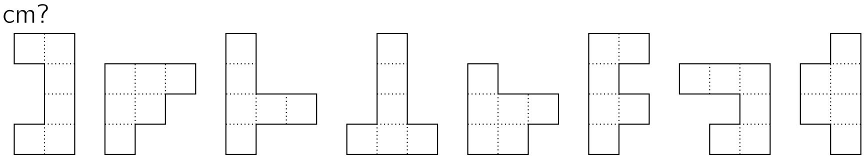
Problema 2. Quique dibuja cinco letras en un cartón. Después dibuja cinco líneas rectas, una a través de cada letra, de forma que al cortar por la línea la letra se divide en la mayor cantidad de pedazos posible. ¿De cuál de las letras se obtienen más pedazos?

(a) O (b) F (c) S (d) H (e) M

Problema 3. Un dragón tiene 5 cabezas; por cada cabeza que se le corta le crecen 5 más. Si se le cortan 6 cabezas, ¿cuántas cabezas tendrá al final?

(a) 29 (b) 30 (c) 32 (d) 33 (e) 35

Problema 4. Las siguientes representan piezas de cartón, cada una formada por 6 cuadrados de $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$. ¿Cuántas de ellas pueden completarse a un rectángulo de $3\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$ pegando sólo otra pieza de 6 cuadrados de $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$?



(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

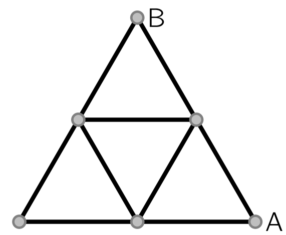
Problema 5. Claudia y Gaby le llevaron a la abuela una canasta con 25 frutas, entre peras y manzanas. En el camino Gaby se comió 1 manzana y 3 peras, mientras Claudia se comió 3 manzanas y 2 peras. Cuando entregaron la canasta había en ella la misma cantidad de peras que de manzanas. ¿Cuántas peras había originalmente en la canasta?

(a) 12 (b) 13 (c) 16 (d) 20 (e) 21

Problema 6. ¿Cuánto es lo menos que puede valer la suma de dos números de 4 cifras que se forman repartiendo los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8?

(a) 2468 (b) 3333 (c) 3825 (d) 4734 (e) 6912

Problema 7. El siguiente es el mapa de un parque que tiene forma de triángulo equilátero en el que cada lado mide 200 m. Está dividido por caminos que dejan regiones triangulares de pasto de lado 100m cada una. Quiero caminar del extremo A al extremo B sin pisar el pasto y sin recorrer dos veces ninguno de los caminos. De todos los caminos posibles, ¿cuánto mide el paseo más largo que puedo dar?



(a) 900 m (b) 800 m (c) 700 m (d) 600 m (e) 400 m

Problema 8. La Señora Trillo hizo dos banderas rectangulares del mismo tamaño. En la primera cosió un cuadrado amarillo y un rectángulo rojo. Al hacer la segunda bandera le faltó tela amarilla, así que cortó el rectángulo más grande que pudo de ese color y lo compensó cortando un rectángulo rojo más grande. Al ponerlas juntas, la Señora se da cuenta de que cortando una franja amarilla de 30 cm de ancho a la primera bandera y quitándole un pedazo de 1500 cm^2 al rectángulo rojo de la segunda, ambas banderas serían idénticas. ¿Cuál es el área amarilla en la segunda bandera?

(a) 1800 cm^2 (b) 1600 cm^2 (c) 1500 cm^2 (d) 1200 cm^2 (e) 1000 cm^2

Problema 9. En cada una de las casillas de la figura se va a escribir un número de forma que la suma de los primeros tres números sea 100, la de los tres números del centro sea 200 y la de los tres últimos sea 300. ¿Cuál es el número que se escribirá en medio?

10				130

(a) 50 (b) 60 (c) 70 (d) 75 (e) 100

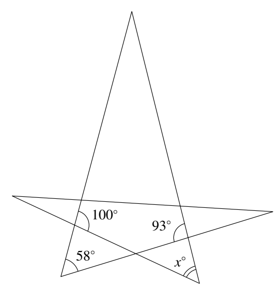
Problema 10. En una mesa hay dos montones de monedas, el de la izquierda con 7 y el de la derecha con 10. Para recogerlas, Úrsula sigue siempre una de las siguientes reglas:

- Tomar 3 monedas de la pila de la izquierda.
- Tomar 2 monedas de la pila de la derecha.
- Tomar 1 moneda de cada pila.

¿Cuál es la menor cantidad de movimientos que debe realizar Úrsula para recoger todas las monedas de la mesa?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 11. En la estrella de la figura se han marcado los valores de algunos ángulos. ¿Cuál es el valor del ángulo marcado con x?

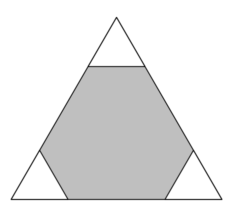


(a) 42º (b) 51º (c) 55º (d) 66º (e) 80º

Problema 12. Cuatro tarjetas tienen un número escrito de un lado y una frase del otro. Las cuatros frases son "múltiplo de 7", "primo", "impar" y "mayor que 100". Los cuatro números son 2, 5, 7 y 12. En cada tarjeta el número escrito de un lado no corresponde con la frase escrita del otro. ¿Cuál es el número que está escrito en la tarjeta que dice "mayor que 100"?

(a) 2 (b) 5 (c) 7 (d) 12 (e) Imposible de determinar

Problema 13. Tres triángulos equiláteros del mismo tamaño se recortaron de las esquinas de un triángulo equilátero con lados de 6 cm de longitud (ver la figura). Si la suma de los perímetros de los tres triángulos pequeños es igual al perímetro del hexágono resultante, ¿cuánto miden los lados de cada uno de los triángulos pequeños?



(a) 1 cm (b) 1.2 cm (c) 1.25 cm (d) 1.5 cm (e) 2 cm

Problema 14. A lo largo del día un número de ratones viene a robar pedazos de queso que están en la mesa de la cocina, mientras el gato Lorenzo los mira pasar sin levantarse de su cojín. Lorenzo observa que cada ratón robó menos de 10 pedazos de queso y que ningún ratón robó la misma cantidad o exactamente la mitad que otro. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de ratones que vio Lorenzo?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 15. Blancanieves heredó un espejo mágico que habla, con forma de cuadrado. Si el espejo dice la verdad, su perímetro aumenta al doble. Si el espejo dice una mentira, cada uno de sus lados se reduce en 2 cm. Sabemos que Blancanieves le hizo 4 preguntas y que 2 veces respondió la verdad y 2 veces dijo mentiras, pero no sabemos en qué orden lo hizo. ¿Cuál es el perímetro más largo que podría tener el espejo después de las 4 respuestas, si al principio cada uno de sus lados medía 8 cm?

(a) 28 cm (b) 80 cm (c) 88 cm (d) 112 cm (e) 120 cm

Problema 16. Paty tiene cinco cubos de diferentes tamaños. Cuando los acomoda desde el más pequeño hasta el más grande la diferencia entre la altura de cada dos cubos consecutivos es de 2 cm. El más alto de los cubos es tan alto como una torre formada por los dos cubos más pequeños, uno sobre otro. ¿Cuál sería la altura de una torre formada por los 5 cubos?

(a) 6 cm (b) 14 cm (c) 22 cm (d) 44 cm (e) 50 cm

Problema 17. En la fiesta de anoche no había más de 50 personas presentes. En un momento $\frac{3}{4}$ exactamente de los hombres estaban bailando con $\frac{4}{5}$ exactamente de las mujeres. ¿Cuántas personas estaban bailando en ese momento?

(a) 20 (b) 24 (c) 30 (d) 32 (e) 46

Problema 18. En el rectángulo de la figura se van a escribir doce números del 1 al 9 de manera que las tres sumas de los números escritos en cada renglón sean iguales, y también las cuatro sumas de los números escritos en cada columna sean iguales. Ya se han escrito 7 números. ¿Cuál número debe ir en el cuadrado que está sombreado?

2	4		2
	3	3	
6		1	

(a) 1 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 9

Problema 19. Digamos que un número de tres cifras es *siamés* si el número formado por los dos primeros dígitos es un cuadrado perfecto y también lo es el número formado por las dos últimas cifras. ¿Cuál es la suma de todos los números siameses de tres cifras?

(a) 1013 (b) 1177 (c) 1465 (d) 1993 (e) 2016

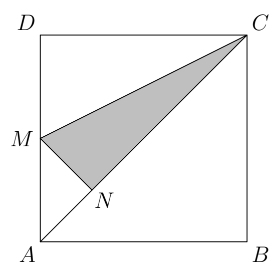
Problema 20. ¿De cuántas formas se puede partir el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en dos subconjuntos, de forma que la suma de los elementos en cada uno de ellos sea la misma?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 21. Andrea, Karla y Luis tienen cada uno la misma cantidad de jugo. Andrea le pasa a Karla el 10% de su jugo. Después, Karla le pasa a Luis el 20% de lo que ella tiene en ese momento. Finalmente, Luis le pasa el 30% de lo que tiene en su vaso a Andrea. Si al final Andrea tiene 633 ml, ¿qué cantidad de jugo había en cada vaso inicialmente?

(a) 633 ml (b) 600 ml (c) 522 ml (d) 511 ml (e) 500 ml

Problema 22. En la figura $ABCD$ es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. Si el área del cuadrado es $120\,\text{cm}^2$, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?

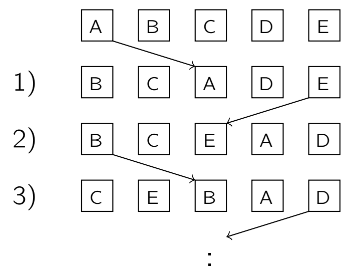


(a) $20\,\text{cm}^2$ (b) $21\,\text{cm}^2$ (c) $22.5\,\text{cm}^2$ (d) $23.5\,\text{cm}^2$ (e) $24\,\text{cm}^2$

Problema 23. Natividad quiere escribir en su libreta los números del 1 al 12 en un círculo de forma que cada dos números consecutivos difieran por 2 o por 3. ¿Cuáles de los siguientes números deben estar juntos?

(a) 5 y 8 (b) 3 y 5 (c) 7 y 9 (d) 6 y 8 (e) 4 y 6

Problema 24. Cinco tarjetas con las letras A, B, C, D y E se ponen sobre la mesa en ese orden, de izquierda a derecha. En un movimiento la carta que está más a la izquierda se coloca en el centro reacomodando el resto como se muestra en la figura. En el segundo movimiento la carta de la orilla derecha se coloca en el centro, en el siguiente se pasa la de la orilla izquierda al centro, en el siguiente la de la orilla derecha al centro, y así sucesivamente. ¿Cuál es la carta que estará en la orilla izquierda después de 2012 movimientos?



(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

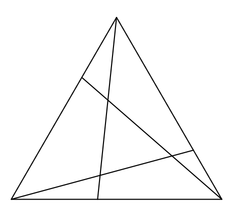
Problema 25. Los 30 cuentos de un libro tienen entre 1 y 30 páginas de extensión. El primer cuento empieza en la primera página. En el libro no hay páginas en blanco ni dos cuentos que compartan una página. Si no hay dos cuentos que tengan la misma extensión, ¿cuál es la mayor cantidad de cuentos que pueden comenzar en una página impar?

(a) 15 (b) 18 (c) 20 (d) 21 (e) 23

Problema 26. Jeanette dobla una cuerda por la mitad y entrelaza los dos pedazos formando una cuerda dos veces más gruesa y la mitad de larga que la original. Luego vuelve a doblar por la mitad la cuerda que le queda y la entrelaza, obteniendo una cuerda cuatro veces más gruesa y la cuarta parte de larga que la original. Esto lo repite una vez más de manera que obtiene una cuerda 8 veces más gruesa y de una octava parte de la longitud de la original. Finalmente corta este cordón grueso y deshace lo entrelazado. Si uno de los pedazos mide 4 m y otro mide 9 m, ¿cuál de las siguientes opciones, si acaso, no puede haber sido la longitud original de la cuerda?

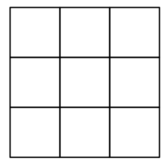
(a) 52 m (b) 68 m (c) 72 m (d) 88 m (e) todas son posibles

Problema 27. Dentro de un triángulo de 19 cm de perímetro se dibujan 3 segmentos de recta como se muestra en la figura. La suma de los perímetros de los 3 cuadriláteros resultantes es igual a 25 cm, mientras la suma de los perímetros de los 4 triangulitos es igual a 20 cm. ¿Cuál es la suma de las longitudes de los tres segmentos dibujados dentro del triángulo?



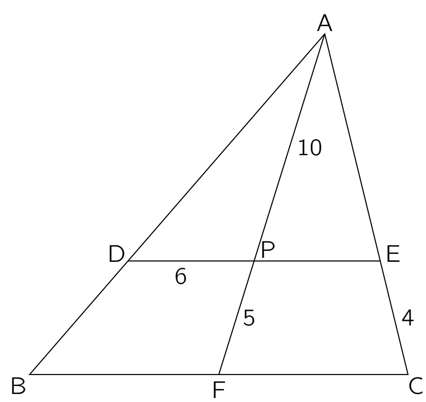
(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

Problema 28. En cada uno de los cuadritos de la figura se va a escribir un número, de forma que el producto de los 4 números en cada cuadrado de 2×2 sea 2 y al multiplicar los 3 números de cada renglón o de cada columna el resultado sea igual a 1. ¿Qué número debe quedar al centro?



(a) 16 (b) 8 (c) 4 (d) $\frac{1}{4}$ (e) $\frac{1}{8}$

Problema 29. En el triángulo ABC el punto D está sobre AB, el punto E está sobre AC, F es el punto medio de BC y P es el punto de intersección de AF con DE. Si sabemos que DE es paralelo a BC y que las medidas de los segmentos DP, PF, EC y AP son 6, 5, 4 y 10, respectivamente, ¿cuál es la longitud de AB?

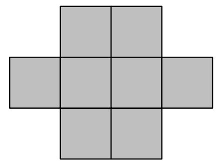


(a) $2\sqrt{117}$ (b) 15 (c) 16 (d) 18 (e) $\sqrt{364}$

Problema 30. Rodrigo quiere matar un monstruo que tiene n cabezas. Él puede cortar dos cabezas al mismo tiempo, pero si al hacerlo todavía le sobra al menos una cabeza al monstruo, entonces inmediatamente le crecen 4 cabezas más (por ejemplo, si tenía 7 cabezas, al cortarle 2 el monstruo se quedaría con 9 cabezas). Sin embargo, cuando en determinado momento el número de cabezas del monstruo es un múltiplo de 3, Rodrigo puede quemar dos tercios de las cabezas sin que le crezca ninguna más. Si en algún punto el monstruo tiene exactamente una cabeza o más de 100 cabezas, el monstruo se vuelve invencible. ¿Para cuántos números n entre 1 y 100 es posible que Rodrigo mate al monstruo?

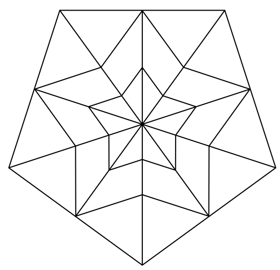
(a) 1 (b) 33 (c) 40 (d) 48 (e) 100

Problema 31. La figura que se muestra está formada por cuadrados iguales. Su perímetro es de 42 cm. ¿Cuál es su área?



(a) 72 cm^2 (b) 36 cm^2 (c) 28 cm^2 (d) 12 cm^2 (e) 8 cm^2

Problema 32. En el pentágono regular de la figura se construyó la estrella más grande uniendo los puntos medios de los lados del pentágono con los puntos medios de las líneas que van de los vértices del pentágono al centro del pentágono. La estrella más pequeña se construyó uniendo los puntos medios de los segmentos que van del centro del pentágono a los vértices de la estrella más grande. Si el área de la estrella pequeña es 1 cm^2, ¿cuál es el área del pentágono?



(a) 4 cm^2 (b) 5 cm^2 (c) 6 cm^2 (d) 8 cm^2 (e) 10 cm^2

Problema 33. Tres corredores participaron en una carrera: Miguel, Fermín y Jaime. Al principio iban en el orden Miguel, Fermín, Jaime, pero durante la carrera Miguel y Fermín se rebasaron uno al otro 9 veces, Fermín y Jaime se rebasaron 10 veces entre sí y Miguel y Jaime se rebasaron 11 veces. ¿En qué orden terminaron la carrera?

(a) Miguel, Fermín, Jaime
(b) Fermín, Jaime, Miguel
(c) Jaime, Miguel, Fermín
(d) Jaime, Fermín, Miguel
(e) Fermín, Miguel, Jaime

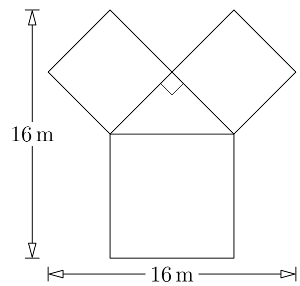
Problema 34. En cada partido de futbol de un torneo, al ganador se le otorgaron 3 puntos, al perdedor 0 y, si hubo empate, entonces cada equipo ganó 1 punto. En 38 partidos un equipo tenía acumulados 80 puntos. ¿Cuál es el máximo número de partidos que pudo haber perdido?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 35. La suma de los dígitos de un entero de nueve dígitos es 8. ¿Cuál es el producto de éstos?

(a) 0 (b) 1 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Problema 36. ¿Cuál es el área de la región formada por el triángulo y los tres cuadrados de la figura?



(a) $114\,\mathrm{m}^2$ (b) $130\,\mathrm{m}^2$ (c) $160\,\mathrm{m}^2$ (d) $186\,\mathrm{m}^2$ (e) $144\,\mathrm{m}^2$

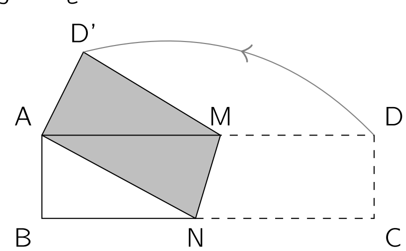
Problema 37. En la lista de números 1, 1, 0, 1, -1, ..., cada uno de los dos primeros números a_1 y a_2 es 1. El tercer número es la diferencia de los dos números anteriores: $a_3 = a_1 - a_2$. El cuarto número es la suma de los dos números anteriores, es decir, $a_4 = a_2 + a_3$. Los números quinto y el sexto son $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, y así sucesivamente. ¿Si la lista tiene en total 100 números, cuál es la suma de todos los números en la lista?

(a) 0 (b) 3 (c) -21 (d) 100 (e) -1

Problema 38. Si Tere se sube a la mesa y Miguel se queda en el suelo, Tere es 80 cm más alta que Miguel. Si Miguel está parado sobre la misma mesa y Tere está en el piso, entonces Miguel es un metro más alto que Tere. ¿Qué altura tiene la mesa?

(a) 20 cm (b) 80 cm (c) 90 cm (d) 100 cm (e) 120 cm

Problema 39. Un rectángulo $ABCD$ de 16 cm de largo por 4 cm de ancho se dobla por la línea MN de tal manera que el vértice C coincide con el vértice A, como lo muestra la figura. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ANMD'$?

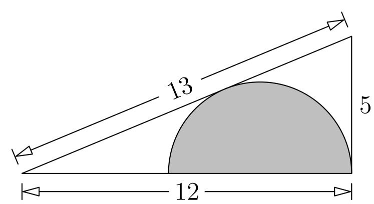


(a) $28\,\mathrm{cm}^2$ (b) $30\,\mathrm{cm}^2$ (c) $32\,\mathrm{cm}^2$ (d) $48\,\mathrm{cm}^2$ (e) $56\,\mathrm{cm}^2$

Problema 40. En la escuela de mi hermano las calificaciones son del 1 al 5. Se aplicó un examen de matemáticas en su grupo y el promedio fue 4. Los niños obtuvieron un promedio de 3.6, mientras que el promedio de las niñas fue de 4.2. Si H representa el número de niños y M el de niñas, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) $2M = H$ (b) $4M = H$ (c) $4H = M$ (d) $M = H$ (e) $2H = M$

Problema 41. La figura muestra un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13. ¿Cuál es el radio del semicírculo inscrito?

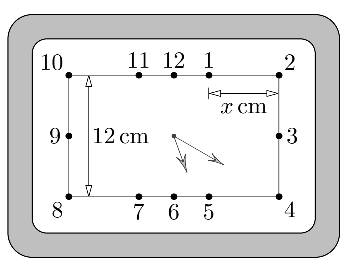


(a) $\frac{7}{3}$ (b) $\frac{10}{3}$ (c) $\frac{12}{3}$ (d) $\frac{13}{3}$ (e) $\frac{17}{3}$

Problema 42. Se forma un número de cuatro dígitos $abcd$ de tal manera que sus dígitos a, b, c, d son distintos y pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. ¿Cuántos de estos números tienen la propiedad de que la suma $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d + d \cdot a$ es divisible entre 3?

(a) 8 (b) 12 (c) 14 (d) 16 (e) 24

Problema 43. El reloj de la figura es de forma rectangular y cada manecilla se mueve a una velocidad constante, como un reloj normal. La distancia entre los números 8 y 10 es de 12 cm y la distancia entre 1 y 2 es x cm. ¿Cuál es el valor de x?



(a) $4\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) $2 + \sqrt{3}$ (e) $12 - 3\sqrt{3}$

Problema 44. Se tienen 2012 tarjetas numeradas del 1 al 2012, en orden, en una línea. Se van recogiendo algunas cartas en forma alternada como sigue: Se recoge la 1 y se deja la 2 en la fila, se recoge la 3 y se deja la 4 en la fila, etc. Luego se vuelve a comenzar con las cartas que quedan en la fila, así que se recoge la 2 y se deja la 4, se recoge la 6 y se deja la 8 y así sucesivamente. Cuando se llega al final de la fila, se vuelve a empezar. Se recoge la carta 2012. ¿En ese momento, cuántas cartas quedan en la fila? (Por ejemplo, si sólo hubiera cartas de la 1 a la 6 y se preguntara por cuántas cartas quedan al recoger la carta 6, la respuesta sería 1 pues se habrían recogido, en orden, las cartas con números 1, 3, 5, 2 y 6 así que sólo quedaría la 4.)

(a) 249 (b) 250 (c) 251 (d) 252 (e) 336

Problema 45. En la mesa hay tres montones de piedras. El montón A tiene 52 piedras, el montón B tiene 40 y el montón C tiene 1. En cada momento Esteban puede hacer uno de las siguientes movimientos:

- Quitar 5 piedras de A y ponérselas a B.
- Quitar 4 piedras de B y ponérselas a C.
- Quitar 3 piedras de A y ponérselas a C.

¿Cuántos movimientos necesita hacer Esteban para lograr que en todos los montones haya el mismo número de piedras?

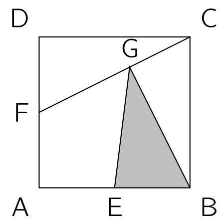
(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Al final encontrarás las respuestas.

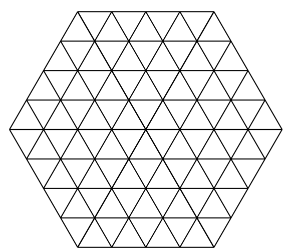
Problema 46. Se tienen 6 pelotas rojas (iguales entre sí), 5 pelotas azules (iguales entre sí) y dos cajas abiertas, una de ellas negra y la otra blanca. Desde lejos se lanzan las pelotas hacia las cajas. Algunas pueden caer dentro de la caja blanca, otras dentro de la negra y otras fuera de las cajas. ¿Cuántos resultados son posibles? (por ejemplo, un resultado posible es que en la caja negra queden 3 pelotas rojas y ninguna azul, que en la caja blanca queden 2 rojas y 3 azules y que fuera de las cajas queden 1 roja y 2 azules).

Problema 47. A una cena llegan 3 parejas. Se quieren sentar en una mesa redonda de manera que nadie quede junto a su pareja. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar si Adela ya tiene asignado un lugar fijo?

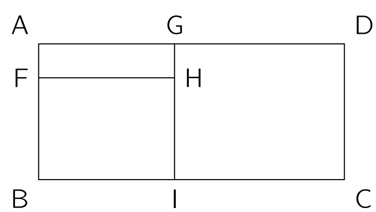
Problema 48. El cuadrado $ABCD$ tiene lados de longitud 2; E y F son los puntos medios de los lados AB y AD, respectivamente, y G es un punto en CF tal que $3CG = 2GF$ (ver la figura). ¿Cuál es el área del triángulo BEG?



Problema 49. La figura representa una telaraña en la que todos los segmentos miden lo mismo. Una araña se encuentra en el centro y quiere llegar a la orilla caminando por los lados de los triángulos, usando sólo 4 segmentos en total. ¿Cuántos caminos distintos puede seguir?



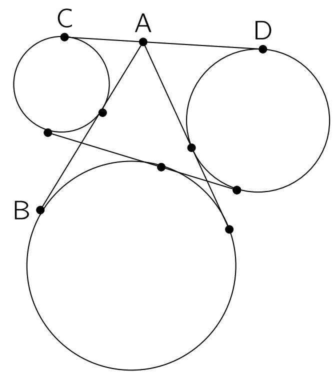
Problema 50. Un rectángulo de lados enteros $ABCD$ y área 756 se parte en tres rectángulos de lados enteros: $AFHG$, $FBIH$ y $GICD$, como se muestra en la figura, y de manera que el área de $FBIH$ es el triple que el área de $AFHG$ y el área de $GICD$ es 5 veces el área de $AFHG$. ¿Cuántas posibilidades hay para la longitud de AD?



Problema 51. Un rectángulo se parte en 5 rectángulos de lados enteros y áreas 3, 4, 7, 10 y 12. ¿Cuántas posiblidades hay para el perímetro del rectángulo?

Problema 52. ¿Para cuántos números a del 2 al 25 se tiene que $a^3 - a$ es un múltiplo de 84?

Problema 53. En la figura las rectas son tangentes a las circunferencias en los puntos indicados. Calcula $|CD|$ si se sabe que $|AB| = 10$.



Problema 54. En una fila hay 6 fichas. Cada ficha tiene una cara negra, N, y la otra blanca, B. Al principio se encuentran en la posición: $NBNBNB$. Lulú puede hacer lo siguiente tantas veces como quiera: Escoge dos fichas y las voltea (por ejemplo, si se escoge la primera y la cuarta, las fichas quedan en la posición $BBNNNB$; si luego escoge la primera y la sexta, entonces la nueva posición es $NBNNNN$). Haciendo esto, ¿cuántas posiciones distintas puede lograr?

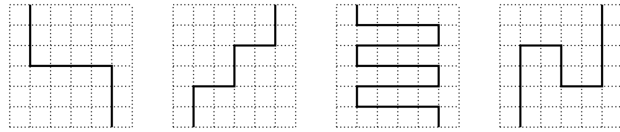
Problema 55. Determinar todas las parejas de enteros positivos (a, b) que cumplan:

$$a + b + ab = 134 \text{ y } a \leq b.$$

Problema 56. ¿Cuántos elementos a lo más podemos escoger dentro del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ si no queremos que la suma de dos de los números escogidos sea múltiplo de un número al cuadrado mayor que 1?

Problema 57. ¿De cuántas maneras es posible acomodar los números del 1 al 10 de manera que del primero al séptimo vayan creciendo, que el séptimo sea mayor que el octavo, y que del octavo al décimo vayan creciendo otra vez? (Por ejemplo, una posibilidad es $1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 4, 7, 9$.)

Problema 58. ¿De cuántas maneras es posible cortar un papel cuadriculado de 6×6 empezando en la parte inferior del papel y llegando a la superior si sólo se puede cortar sobre las líneas de la cuadrícula, las dos piezas en que quede partido deben ser iguales y no se puede cortar hacia abajo (ver ilustración)? (*Nota:* Dos piezas se consideran iguales si se puede colocar una sobre la otra y ajustan perfectamente.)



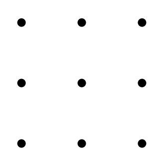
corte válido corte válido corte válido corte inválido

Problema 59. En un triángulo equilátero ABC de lado 2 se prolonga el lado AB hasta un punto D de manera que B sea punto medio de AD. Sea E un punto sobre AC de manera que $\angle ADE = 15°$. Se toma un punto F sobre AB de manera que $|EF| = |EC|$. Determina el área del triángulo AFE.

Problema 60. En la figura se van a dibujar flechas entre parejas de puntos satisfaciendo las tres condiciones siguientes:

- Ninguna flecha empieza y termina en el mismo renglón o en la misma columna.
- En cada renglón y en cada columna hay exactamente una flecha que empieza ahí.
- En cada renglón y en cada columna hay exactamente una flecha que termina ahí.

¿De cuántas maneras se puede hacer?



Soluciones de los Problemas

Solución 1. Tenemos que 3 barras cuestan \$60, así que cada barra cuesta \$20. La respuesta es (a).

Solución 2. Si trazamos una línea horizontal a la mitad de la M, obtendremos 5 pedazos. La 0 puede dividirse en a lo más 2 pedazos y las demás en 4 pedazos cada una. La respuesta es (e).

Solución 3. Cada corte aumenta en 4 el número de cabezas, así que al final el dragón tendrá $5 + (6 \times 4) = 29$ cabezas. La respuesta es (a).

Solución 4. La primera y la octava figuras se pueden juntar para formar el rectángulo; la segunda se puede completar con una igual a ella y lo mismo ocurre con la sexta. La quinta y la séptima también son complementarias. Sólo la tercera y la cuarta necesitan de dos piezas cada una. La respuesta es (c).

Solución 5. Entre las dos se comieron 9 frutas, así que entregaron la canasta con $25 - 9 = 16$ frutas: 8 peras y 8 manzanas. Como se comieron 5 peras entre las dos, al inicio había $8 + 5 = 13$ peras. La respuesta es (b).

Solución 6. Es claro que lo mejor es que los dígitos de los millares sean los más chicos, que les sigan los de las centenas, luego los de las decenas y finalmente los de las unidades, por ejemplo, que los números sean 1357 y 2468. La suma que se obtiene es 3825. La respuesta es (c).

Solución 7. Mi recorrido empieza con A y nunca vuelve a pasar por allí porque estaría usando un camino más de una vez. De la misma manera, solamente puedo usar uno de los que llegan a B en mi recorrido. Puedo usar 7 de los caminos de la siguiente manera: voy a la izquierda, después hacia arriba a la derecha, después a la izquierda, luego abajo a la derecha, otra vez a la izquierda y después directo hasta B. La respuesta es (c).

Solución 8. Al segundo rectángulo rojo le sobra una pieza rectangular con respecto al que se usó en la primera bandera. Uno de los lados de ese pedazo extra mide 30 cm y como su área es de 1500 cm^2, el otro lado mide 50 cm, que coincide con la medida del cuadrado amarillo original. Así, el otro lado del rectángulo amarillo mide 50-30=20 cm y su área es $50 \times 20 = 1000$ cm^2. La respuesta es (e).

Solución 9. Entre el segundo y el tercer cuadro la suma es 90, así que el cuarto cuadro tiene el número 110; esto nos dice que los últimos dos cuadros suman 240 y lo que falta para 300 es 60. La respuesta es (b).

Solución 10. Para dejar un número de monedas múltiplo de 3 en el primer montón debe hacer la tercera operación 1, 4 o 7 veces. Para dejar un número par de monedas en el segundo montón debe hacer la tercera operación 0, 2, 4, 6, 8, 10 veces. Entonces lo mínimo es hacer la tercera operación 4 veces, una vez la primera operación y 3 veces la segunda operación. La respuesta es (d).

Solución 11. Los triángulos inferiores de la estrella tienen un vértice común y entonces el ángulo en ese vértice es igual. Llamemos α a ese ángulo. El otro ángulo en el triángulo izquierdo mide $180^o - 100^o = 80^o$; el otro ángulo en el triángulo de la derecha mide $180^o - 93^o = 87^o$. Fijándonos en las sumas de los ángulos de los triángulos inferiores de la estrella, tenemos que $x + \alpha + 87^o = 58^o + 80^o + \alpha$, de donde $x = 51^o$. La respuesta es (b).

Solución 12. Detrás de la tarjeta "primo" debe estar escrito el 12 ya que es el único que no lo es, así que detrás de "impar" debe estar el 2 y entonces el 5 debe estar detrás de "múltiplo de 7". La respuesta es (c).

Solución 13. Sea L la longitud de los lados de cada triángulo pequeño. El perímetro del hexágono es $(6 - 2L) \cdot 3 + 3L = 18 - 3L$, mientras que la suma de los perímetros de los triángulos pequeños es $9L$. Así, $18 - 3L = 9L$, de donde $L = 1.5$ cm. La respuesta es (d).

Solución 14. Si hacemos una lista con las cantidades que robaron los ratones, tendríamos que, como nadie robó la mitad de lo que robó otro, sólo pueden aparecer dos números del conjunto $\{1, 2, 4, 8\}$ y uno del conjunto $\{3, 6\}$. Las tres opciones de números restantes pueden aparecer en la lista sin importar los que ya elegimos. La respuesta es (c).

Solución 15. Para obtener el mayor resultado lo mejor es multiplicar por 2 primero y después reducir. Entonces al final, lo más largo que puede ser el lado es $8 \times 2 \times 2 - 2 - 2 = 28$. En ese caso el perímetro del espejo será $4 \times 28 = 112$ cm. La respuesta es (d).

Solución 16. Sea h la altura del cubo más pequeño. Tenemos que $h+(h+2)=h+8$, de donde $h=6$. La altura de la torre es $h+(h+2)+(h+4)+(h+6)+(h+8)=5h+20=50\,\mathrm{cm}$. La respuesta es (e).

Solución 17. Sea h el número de hombres y sea n el total de personas en la fiesta. Tenemos que $\frac{3h}{4}=\frac{4(n-h)}{5}$, de donde $31h=16n$; entonces n debe ser un múltiplo de 31 positivo y menor a 50, es decir $n=31$. De la ecuación anterior tenemos que $h=16$ y en total hay $\frac{3(16)}{4}=12$ hombres bailando, así que hay 24 personas bailando en total. La respuesta es (b).

Solución 18. *Primera solución:* Llamemos s a la suma de las columnas. El número que falta en la tercer columna es $s-4$ y la suma de cada renglón es igual a $2+4+(s-4)+2=s+4$. El número que falta en la segunda columna es $s-4-3=s-7$. Si x es el número que estamos buscando, la suma del último renglón es $6+(s-7)+1+x=x+s$; como las sumas de todos los renglones son iguales, $x+s=s+4$, de donde $x=4$.

Segunda solución: La suma de todos los cuadros se puede obtener como la de las 4 columnas o la de los 3 renglones; de esta manera tenemos que la suma de las columnas es múltiplo de 3 y la de los renglones es múltiplo de 4. Entonces el único número que puede ir en el cuadro en blanco del primer renglón es el 8. Aquí ya tenemos que la suma de los números en cualquier columna es 12 y la suma en cualquier renglón es 16. De aquí ya es fácil completar la figura y queda como sigue:

2	4	8	2
4	3	3	6
6	5	1	4

La respuesta es (b).

Solución 19. Los cuadrados de dos cifras son 16, 25, 36, 49, 64 y 81, así que los únicos números siameses son 164, 364, 649 y 816, cuya suma es 1993. La respuesta es (d).

Solución 20. Como la suma total es 28, la suma de cada conjunto debe ser 14. En uno de los conjuntos está el 7 y debe estar acompañado con 1 y 6, o con 2 y 5, o con 3 y 4, o con 1, 2 y 4. La respuesta es (d).

Solución 21. Lo que Andrea tiene es $633=[.9+(.3)(1+(.2)(1.1))]x=[.9+(.3)(1.22)]x=[.9+.366]x=1.266x$, de donde $x=\frac{633}{1.266}=500$. La respuesta es (e).

Solución 22. Calculemos el área de los triángulos no sombreados. Sean P el punto medio de CB, Q el punto medio de AB y O la intersección de AC con MP. Sea A_1 el área del triángulo ABC que, por ser la mitad del cuadrado, es igual a $60\,\text{cm}^2$. Sea A_2 el área del triángulo CDM que, por ser la mitad del rectángulo $MPCD$, que a su vez es la mitad del cuadrado $ABCD$, es igual a $30\,\text{cm}^2$. Sea A_3 el área del triángulo ANM que, por ser la cuarta parte del cuadrado $AQOM$, que a su vez es la cuarta parte del cuadrado $ABCD$, es igual a $7.5\,\text{cm}^2$. Como $A_1+A_2+A_3 = 97.5\,\text{cm}^2$, el área sombreada es igual a lo que falta para completar $120\,\text{cm}^2$. La respuesta es (c).

Solución 23. Observemos que el 12 debe ir junto al 10 y al 9, el 11 debe ir junto al 9 y al 8, y entonces un pedazo del círculo debe ser 10 - 12 - 9 - 11 - 8 . Como 10 no puede ir junto al 8 (se cerraría el círculo antes de tiempo), entonces el 7 va junto al 10 y la mitad del círculo está determinada como 7 - 10 - 12 - 9 -11- 8. Haciendo un análisis muy similar se obtiene que la otra mitad del círculo es 6 - 3 - 1 - 4 - 2 - 5 y la única forma de pegarlos es haciendo que el 6 sea vecino del 8. La respuesta es (d).

Solución 24. Después de 5 pasos, las cartas quedan justo en orden inverso al inicial y en el sexto paso se toma la carta de la derecha y se pone en el centro, así que después de 10 pasos el orden es como al principio y esto se vuelve a repetir cada 10 pasos. Como $2012 = 201 \cdot 10 + 2$, El paso 2012 es como el segundo y la carta B queda enmedio. La respuesta es (b).

Solución 25. Si al principio del libro acomodamos todos los cuentos con extensión par, esos 15 cuentos cumplirían con la condición. Si enseguida acomodamos todos los cuentos con extensión impar, tendríamos 8 cuentos más que cumplen con la condición, dando un total de 23. Tratemos de encontrar un acomodo mejor. Observemos que si un cuento comienza en una página impar y su extensión es impar, entonces el siguiente cuento empieza con una página par (y no cumple). Así, si m es la cantidad de cuentos con extensión impar que cumplen, hay al menos $m-1$ cuentos que no cumplen con la condición (suponiendo que el último sea uno de los de extensión impar que sí cumplen). Para que el acomodo sea mejor al que dimos necesitamos que $m \geq 8$ (si no, $30-(m-1) > 23$), pero entonces la cantidad máxima de cuentos que pueden cumplir es 15+8=23. Así, no podemos encontrar un acomodo con más de 23 cuentos que cumplan la condición. La respuesta es (e).

Solución 26. Sea a la longitud de los pedazos que tienen a los extremos originales de la cuerda y l la longitud de un octavo de la cuerda. Tenemos que la cuerda quedó dividida en segmentos de longitud a, $2a$ y $2(l-a)$. Las combinaciones posibles son $a = 4$ y $2(l-a) = 9$, $a = 9$ y $2(l-a) = 4$, $2a = 4$ y $2(l-a) = 9$, $2a = 9$ y $2(l-a) = 4$, de donde obtenemos las longitudes 68, 88, 52 y 52, respectivamente. La respuesta es (c).

Solución 27. Llamemos S a la suma que buscamos. Tenemos que la suma de los perímetros de las 7 figuras resultantes es igual al perímetro del triángulo grande más dos veces S, es decir, $25+20=19+2S$, de donde $S=13$. La respuesta es (a).

Solución 28. Sean a, b, c, d, e, f, g, h e i los números que se escribirán, según se muestra en la figura.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Tenemos que $(a\times b\times c)\times(d\times e\times f)=1$ y $(a\times b\times d\times e)\times(b\times c\times e\times f)=4$, de donde $b\times e=4$. Haciendo un razonamiento parecido podemos concluir que $h\times e=4$. Así, tenemos que $e=1\times e=(b\times e\times h)\times e=16$. La respuesta es (a).

Solución 29. Como F es punto medio de BC y ED es paralela a BC, por semejanza, P es punto medio de DE. Ahora, también por semejanza, $\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{PF}$, esto es, $AE=EC\cdot\left(\frac{AP}{PF}\right)=4\left(\frac{10}{5}\right)=8$. Entonces el triángulo AEP debe ser rectángulo pues $10^2=6^2+8^2$ y entonces también lo es ACB. Una vez más, usando semejanza tenemos que $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$, es decir, $BC=\frac{DE\cdot AC}{AE}=\frac{12\cdot 12}{8}=18$. Finalmente, usando el teorema de Pitágoras obtenemos $AB=\sqrt{18^2+12^2}=\sqrt{4(81+36)}=2\sqrt{117}$. La respuesta es (a).

Solución 30. La única forma de matarlo es lograr que en algún momento tenga 2 cabezas. Si n es impar, entonces al sumarle 2 o al dividir entre 3, el número sigue siendo impar, así que no es posible. Si $n>2$ es par, entonces alguno de n, $n+2$ o $n+4$ es múltiplo de 3 y al dividirlo entre 3 sigue siendo par pero más chico que n, así que en algún momento se llega a 2. El único problema es con 98 y con 100 con los que ya no se puede sumar 2 hasta llegar a un múltiplo de 3 pues se sobrepasa 100. La respuesta es todos los pares menores o iguales que 96. La respuesta es (d).

Solución 31. Sobre el perímetro de la figura tenemos 6 segmentos verticales y 8 segmentos horizontales. De esta forma el perímetro está formado por 14 segmentos iguales y entonces cada segmento mide $\frac{42}{14}=3$ cm. Esto nos dice que cada cuadrito tiene área $9\,\text{cm}^2$ y, como son 8 cuadritos, el área total es $72\,\text{cm}^2$. La respuesta es (a).

Solución 32. La estrella más grande tiene las longitudes del doble de tamaño que las de la estrella pequeña, así que su área es el cuádruple de la de la estrella pequeña. Cada triángulo determinado por el centro del pentágono, un pico de la estrella y un vértice del pentágono tiene el doble de área que el triángulo determinado por el pico, el centro y el punto medio de la línea que va de ese vértice al centro (pues la base del triángulo del pentágono es el doble que la base del triángulo de la estrella mientras que la altura es la misma). Entonces el área del pentágono es el doble que el de la estrella grande. La respuesta es (d).

Solución 33. Como el número de veces que cambiaron de lugar Miguel y Fermín es impar y al principio Miguel le iba ganando a Fermín, al final Fermín le ganó a Miguel; con este mismo razonamiento vemos que Fermín ganó a Jaime y Jaime ganó a Miguel. La respuesta es (b).

Solución 34. Llamemos g al número de partidos ganados, e al de empatados y p al de perdidos. Tenemos que $80 = 3g + e$ y $38 = g + e + p$. Multipliquemos la segunda ecuación por 3: $114 = 3g + 3e + 3p$; a ésta restémosle la primera ecuación: $34 = 2e + 3p$. Como ambos e y p son no negativos, tenemos que $p \leq 11$ pero si $p = 11$, entonces e no es entero; para $p = 10$ tenemos $e = 2$ y, sustituyendo en la primera ecuación, $g = 26$. Ésta es la solución de ambas ecuaciones que tiene la máxima p. La respuesta es (c).

Solución 35. Si cada uno de los dígitos fuera mayor que cero, la suma sería mayor o igual a 9. Como la suma es 8, alguno de los dígitos del número debe ser 0 y el producto de todos ellos debe ser 0, también. La respuesta es (a).

Solución 36. Trazando las dos diagonales del cuadrado grande y las diagonales "verticales" de los cuadrados pequeños, podemos dividir la figura en 9 triángulos iguales al central. Observando que el lado del cuadrado grande mide 8 m y que éste está formado por 4 triángulos, tenemos que el área que buscamos es $\frac{9}{4}(8 \cdot 8) = 144\,\mathrm{m}^2$. La respuesta es (e).

Solución 37. Cada 12 términos la lista vuelve a repetirse. Como la suma de cada 12 es igual a 0, la suma de todos los elementos de la lista es igual a la suma de los primeros 4 La respuesta es (b).

Solución 38. Si h es la altura de la mesa, t la de Tere y m la de Miguel, tenemos que $(h+t)+(h+m) = t+m+180$, así que $h = 90\,\mathrm{cm}$. La respuesta es (c).

Solución 39. Por simetría, $AM = AN$ y $D'M = BN$. Como $AN = NC$ y $D'M = MD$, tenemos que los trapecios $AMNB$ y $NCDM$ son congruentes, así que el área sombreada es $\frac{64}{2}\ \mathrm{cm}^2$. La respuesta es (c).

Solución 40. El promedio del grupo es igual $\frac{3.6H+4.2M}{H+M} = \frac{3.6(H+M)+.6M}{H+M} = 3.6 + \frac{.6M}{H+M}$, de donde $\frac{.6M}{H+M} = .4$; despejando la ecuación anterior obtenemos $.2M = .4H$, así que hay el doble de niñas que de niños en el grupo. La respuesta es (e).

Solución 41. El punto de tangencia del semicírculo con el triángulo divide a ese lado en un segmento que mide 5 y otro que mide 8. Por Pitágoras, $r^2 = (12 - r)^2 - 8^2$, de donde $r = \frac{10}{3}$. La respuesta es (b).

Solución 42. Una vez que determinemos la posición donde escribiremos el 3, tendremos dos de los sumandos de la ecuación que serán múltiplos de 3. Supongamos que $a = 3$, en ese caso $b \cdot c + c \cdot d = (b + c) \cdot d$ debe ser un múltiplo de 3, eligiendo b, c y d de $\{1, 2, 4\}$. Si $d = 4$ es posible escribir los otros dos números en cualquier orden y la ecuación se cumple; esta misma situación tenemos cuando $d = 1$. Si $d = 2$, no hay forma de completar el número para cumplir con la ecuación. Así, para cada posición posible del 3 hay 4 combinaciones de los números restantes que funcionan. En total, hay $4 \cdot 4 = 16$ números posibles. La respuesta es (d).

Solución 43. Cada hora, la manecilla recorre $\frac{\pi}{6}$. Llamemos A al punto que indica a las 12, B al que indica a la 1, C al que indica a las 2 y O al centro de las manecillas. En el triángulo OAB, $tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{AB}{6}$, así que $AB = 2\sqrt{3}$. En el triángulo OAC, $tan(\frac{2\pi}{6}) = \frac{AC}{6}$, así que $AC = 6\sqrt{3}$. De esta forma, $BC = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$. La respuesta es (a).

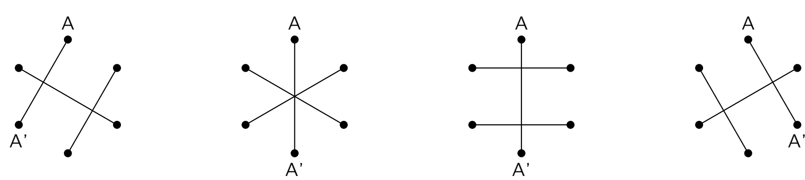
Solución 44. En la primera vuelta se descartan todas las impares que son $2012/2 = 1006$. En la segunda vuelta se descartan las que tienen número de la forma $4k + 2$ que son $2012/4 = 503$. En la tercera vuelta se descartan las que tienen número de la forma $8k + 4$ y, como $2012 = 8 \cdot 251 + 4$, la tarjeta 2012 queda descartada al final de esta vuelta y el número de tarjetas que se descartaron en la vuelta fue $251 + 1$ (pues los posibles valores para k en esta vuelta son $0, 1, 2, \ldots, 251$). El total de tarjetas descartadas es $1006 + 503 + 252 = 1761$, así que el número de cartas que quedan es $2012 - 1761 = 251$. La respuesta es (c).

Solución 45. Como $52 + 40 + 1 = 93$, en cada montón deberá haber al final $93/3 = 31$ piedras. De A sólo se quitan piedras así que es claro que podemos considerar que los movimientos se hacen empezando por quitar todas las piedras necesarias de A. Llamemos b al número de movimientos que se hacen para mandar piedras de A a B, y sea c el número de movimientos que se hacen para mandar piedras de A a C. Entonces $52 - 5b - 3c$ debe ser 31, o sea que $3c = 21 - 5b$, y como b y c son enteros no negativos, las únicas posibilidades son $b = 0$ y $c = 7$, o $b = 3$ y $c = 2$. El primer caso es imposible porque B tendría las mismas 40 piedras del principio y, quitándole de 4 en 4 no es posible dejarle 31. En el segundo caso, después de que reciba las 15 piedras de A, B tendrá 55 piedras y, para que al final quede con 31 habrá que quitarle 24, es decir, hacer 6 veces la operación de B a C. El número total de operaciones es $3 + 2 + 6 = 11$. La respuesta es (b).

Solución 46. *Primera solución.* Tenemos las siguientes posibilidades para las pelotas rojas: Si hay 0 fuera, entonces en la caja negra puede haber de 0 a 6 pelotas rojas (y el resto en la caja blanca); éstas son 7 posibilidades. Si hay 1 pelota roja fuera, entonces puede haber de 1 a 6 pelotas en la caja negra (y el resto en la blanca); éstas son 6 posibilidades más. Así sucesivamente hasta la última posibilidad de que todas las pelotas rojas estén fuera. En total las posibilidades para las pelotas rojas son: $7+6+5+4+3+2+1=28$. De la misma manera, tenemos que las posibilidades para las pelotas azules son $6+5+4+3+2+1=21$. El total de posibilidades es $28 \cdot 21 = 588$.

Segunda solución. Para contar las posibilidades de las pelotas rojas necesitamos ver el número de posibilidades de que la suma de tres números enteros no negativos sea 6. Ponemos 8 casillas en una fila horizontal y escogemos dos lugares en esas casillas en las que se ponen *separadores*; el número de casillas a la izquierda del primer separador representa el número de pelotas fuera de las cajas, el número de casillas entre los dos separadores representa el número de pelotas en la caja negra y el número de casillas a la derecha del segundo separador representa el número de pelotas en la caja blanca. Como la forma de escoger dos lugares en 8 posibles es $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, éstas son las distintas formas de distribuir las pelotas rojas. Análogamente, para distribuir las azules hay $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ formas. El total es $28 \cdot 21 = 588$.

Solución 47. Digamos que las parejas son: (A, A'), (B, B') y (C, C') y que Adela es A. Tenemos las siguientes posibilidades de acomodo de las parejas con referencia a A:

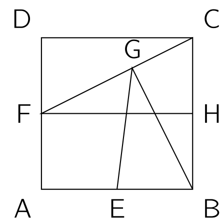


Cada línea representa dónde queda una pareja. En cada esquema, la pareja $\{B, B'\}$ tiene a escoger cualquiera de las dos líneas y, entre sí B y B' se pueden quedar en cualquiera de los dos lugares; la línea restante queda determinada para la pareja $\{C, C'\}$ y esa pareja tiene dos posibilidades de acomodo en su línea. Entonces hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibilidades en cada esquema, así que en total hay 32 posibilidades.

Solución 48. *Primera solución.* Sean H el punto medio del lado BC e I y J los pies de las alturas desde G hacia los segmentos FH y AB, respectivamente. Los triángulos CFH y GFI son semejantes así que la razón entre sus alturas es la misma que entre sus hipotenusas:

$$\frac{CH}{GI} = \frac{CF}{GF} = \frac{CG+GF}{GF} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

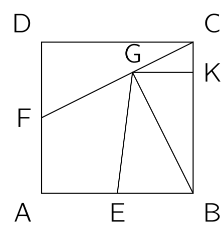
pero $CH = 1$, así que $GI = \frac{3}{5}$ y entonces $GJ = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$. El área buscada es $\frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5}$.



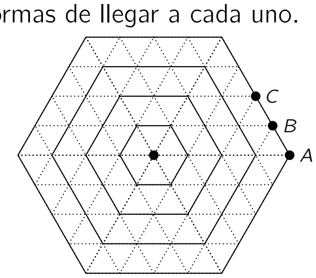
Segunda solución. Sea K un punto sobre BC de forma que GK sea paralela a AB. Como CDF y GKC son semejantes, se tiene que:

$$CK = \frac{CK}{1} = \frac{CK}{FD} = \frac{CG}{FC} = \frac{CG}{FG + GC} = \frac{1}{\frac{FG+GC}{CG}} = \frac{1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{2}{5}\ .$$

Así, el área del triángulo EBG es igual a $\frac{1}{2} EB \cdot BK = \frac{1}{2}(1)(2 - \frac{2}{5}) = \frac{4}{5}$.



Solución 49. Con líneas continuas formando hexágonos concéntricos, partamos la telaraña como se indica en la figura y observemos que los caminos deben tocar exactamente una vez cada uno de estos hexágonos. Observemos también que hay tres tipos de vértices en la orilla, indicados por A, B o C en la figura. Los del tipo A son 6, los del tipo B son 12 y los del tipo C son 6. Contemos por separado el número de formas de llegar a cada uno.



Para llegar a un vértice del tipo A sólo hay una forma: en línea recta.

A un vértice del tipo B se puede llegar de 4 maneras:

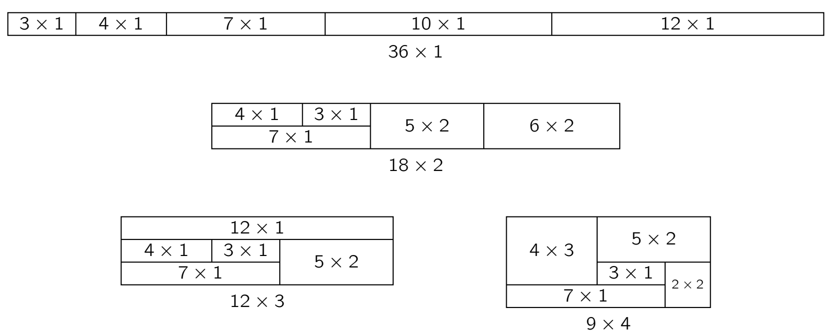
Para llegar a un vértice del tipo C se puede llegar de 6 maneras:

El número total de caminos es $6 + 12 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 90$.

Solución 50. Sean k el área de $AFHG$, $a = AG$, $b = AF$ y $c = GD$. Entonces el área de $FBIH = 3k$, el área de $GICD$ es $5k$ y el área total es $756 = k+3k+5k = 9k$, por lo que $ab = k = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ $(*)$, $FB = 3b$ y $4b \cdot c = 5k = 5 \cdot 84 = 4 \cdot 5 \cdot 21$, de donde $bc = 3 \cdot 5 \cdot 7$ $(**)$. De $(*)$ y $(**)$ vemos que a debe ser múltiplo de 4. Entonces las posibilidades son:

a	b	c	$AD = a + c$
4	21	5	9
12	7	15	27
28	3	35	63
84	1	105	189

Solución 51. El rectángulo que buscamos tiene área $3 + 4 + 7 + 10 + 12 = 36$. Entonces el rectángulo debe ser de 36×1, de 18×2, de 12×3, de 9×4 o de 6×6. Sin embargo, observamos que uno de los rectángulos ya partidos tiene área 7, así que la única posibilidad es que sea de 7×1, de donde vemos que el rectángulo grande no puede medir 6×6. En la siguiente figura se ilustra que todas las demás medidas mencionadas arriba son posibles y entonces los perímetros posibles son: $2(36 + 1) = 74$, $2(18 + 2) = 40$, $2(12 + 3) = 30$, $2(9 + 4) = 26$.



Solución 52. Observemos primero que $84 = 3 \cdot 4 \cdot 7$. Por otro lado tenemos que $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$ es el producto de tres enteros consecutivos que siempre es múltiplo de 3, así que sólo basta ver que sea múltiplo de 7 y de 4; para ello, alguno de los números $a - 1$. a y $a + 1$ debe ser múltiplo de 7 y debe haber dos pares entre esos tres números o uno de ellos debe ser múltiplo de 4. Analicemos las posibilidades para $(a - 1, a, a + 1)$ cuando alguno de los números es múltiplo de 7:

$(5, 6, 7)$ tiene sólo un par no múltiplo de 4 así que no.

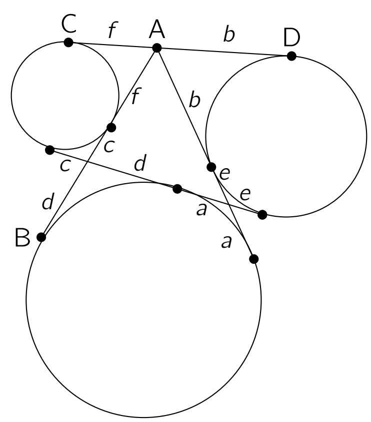
$(6, 7, 8)$ tiene dos pares, así que sí.

$(7, 8, 9)$ tiene un múltiplo de 4, así que sí.

$(12, 13, 14)$ tiene dos pares así que sí.

$(13, 14, 15)$ tiene sólo un par no múltiplo de 4 así que no.
$(14, 15, 16)$ tiene dos pares, así que sí.
$(19, 20, 21)$ tiene un múltiplo de 4, así que sí.
$(20, 21, 22)$ tiene dos pares, así que sí.
$(21, 22, 23)$ tiene sólo un par no múltiplo de 4 así que no.
En total son 6.

Solución 53. Sabemos que si desde un punto exterior a un círculo se trazan las dos tangentes, entonces las distancias del punto exterior a los puntos de tangencia son iguales (esto es por simetría). Usando esto, llamemos a, b, c, d, e y f a las distancias indicadas en la figura.



También por simetría tenemos que

$$c + d + a + e = f + b \quad (*)$$

Por otro lado,

$$f + c + d = b + e + a \quad (**)$$

Sumando las ecuaciones $(*)$ y $(**)$ obtenemos

$$f + 2c + 2d + a + e = f + 2b + e + a$$

de donde $c + d = b$ y así $|CD| = f + b = f + c + d = |AB| = 10$.

Solución 54. Primero observemos que el número de negras siempre es impar puesto que al principio lo es y el número de negras de un paso al paso siguiente se modifica como sigue: Si se voltean dos negras el número disminuye en 2, si se voltean dos blancas el número aumenta en 2, y si se voltean una negra y una blanca el número queda igual.

Ahora veamos que podemos lograr una negra en cualquier lugar y el resto de blancas. De $BNBNBN$, al voltear las dos primeras logramos $NBBNBN$; luego, al voltear la cuarta y la sexta obtenemos $NBBBBB$; aquí ya hemos logrado 1 negra en la primera posición y 5 blancas en las demás; a partir de esta posición es claro que podemos lograr una negra en cualquier posición y las demás blancas (simplemente escogemos voltear la primera y la que esté en la posición en donde queremos que esté la negra).

Para lograr 3 negras y 3 blancas buscamos obtener una negra en alguna de las posiciones donde queremos que haya negra y las demás blancas (esto se puede gracias a lo dicho arriba); después se voltean las dos fichas que estén en los otros dos lugares donde queremos que haya negras.

Lograr 5 negras y 1 blanca es análogo a lograr 1 negra y 5 blancas, pues trabajamos con los colores a la inversa.

Ahora contemos las posibilidades:

Primera forma: El número de posibilidades de tener 1 negra y 5 blancas es 6 y también éste es el número de posibilidades de tener 5 negras y 1 blanca. Para ver el número de posibilidades de tener 3 negras debemos escoger los lugares donde quedan y las posibilidades son: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356 y 456 (son 20 posibilidades); otra forma es pensando que para escoger uno de los lugares en que aparece una negra tenemos 6 posibilidades, luego para escoger otro de los lugares donde hay negra tenemos 5 posibilidades y para el último lugar tenemos 4 posibilidades; sin embargo $6 \cdot 5 \cdot 4$ cuenta cada arreglo 6 veces (pues, por ejemplo, el arreglo 123 se repite como 132, 213, 231, 312 y 321). La cantidad total en este caso es $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$. El total es $6 + 20 + 6 = 32$.

Segunda forma: Observemos que la mitad de las posiciones tiene un número impar de negras y la otra mitad tiene un número par de negras. Para convencernos de esto pensemos que si vamos formando la fila poniendo una ficha cada vez, la mitad de las veces el número de negras que se tenía antes de agregar la ficha se conserva al agregarla (cuando se pone esa ficha en posición B) y la otra mitad de las veces (cuando se pone esa ficha en posición N) aumenta en 1 (y en ese caso cambia de par a impar o viceversa). Como el número total de posiciones es 2^6, el número de posiciones que tiene una cantidad impar de negras es $\frac{2^6}{2} = 2^5 = 32$.

Solución 55. *Primera solución.* Como son números positivos tenemos que $ab < 134$, de donde $a \leq \sqrt{134}$ y, por ser entero, $a \leq 11$. Por otro lado, observamos que no pueden ser ambos a y b impares pues 134 es par; también es imposible que sólo uno de ellos sea par pues el otro sería la diferencia de pares. Hasta aquí tenemos que ambos son pares y que $a \leq 10$. Además, podemos despejar b y tenemos $b = \frac{134-a}{1+a}$. Ahora analicemos las distintas posibilidades para a.
Si $a = 2$, $b = \frac{132}{3} = 44$.
Si $a = 4$, $b = \frac{130}{5} = 26$.
Si $a = 6$, $b = \frac{128}{7}$, que no es entero.

Si $a=8$, $b=\frac{126}{9}=14$.
Si $a=10$, $b=\frac{124}{11}$, que no es entero.
Entonces las posibles soluciones son $(2,44)$, $(4,26)$ y $(8,14)$.

Segunda solución. Observemos que $(1+a)(1+b)=1+a+b+ab$, de donde $(1+a)(1+b)=135$. Como $135=3\cdot 3\cdot 3\cdot 5$, las distintas posibilidades de factorización de 135 como producto de dos enteros mayores que 1 son: $135=3\cdot 45$, $135=5\cdot 27$ y $135=9\cdot 15$. De aquí obtenemos las parejas (a,b): $(2,44)$, $(4,26)$ y $(8,14)$.

Solución 56. La suma de dos números escogidos no puede ser múltiplo de $2^2=4$, así que no puede haber un número con residuo 1 al dividirlo entre 4 y otro cuyo residuo de la división entre 4 sea 3. Esto dice que la elección de cualquiera de los números $1,5,9,13,17$ excluye la elección de cualquiera de los números $3,7,11,15,19$. Por la misma razón, a lo más se puede escoger un número con residuo 0 (o sea, uno de la lista $4,8,12,16,20$) y uno con residuo 2 (uno de la lista $2,6,10,14,18$). Esto nos dice que el conjunto buscado a lo más tiene $5+1+1=7$ elementos; sin embargo, las sumas tampoco pueden ser múltiplo de 9, así que los números 1 y 17 se excluyen mutuamente y lo mismo pasa con los números 5 y 13, los números 3 y 15 y los números 7 y 11. Entonces el conjunto buscado a lo más tiene 5 elementos. Vemos que sí es posible elegir 5 escogiendo el conjunto: $\{1,2,5,9,12\}$.

Solución 57. Al número que está en el lugar k de la lista le llamaremos a_k.

Primera forma. Como a_7, a_9 y a_{10} son mayores que a_8, entonces las posibilidades para a_8 son $1,2,\ldots,7$.
• Si $a_8=7$, entonces hay 3 posibilidades para escoger a_9 y a_{10} (pues deben ser dos números en $\{8,9,10\}$ y las opciones son $\{8,9\}$, $\{8,10\}$ y $\{9,10\}$). Al escoger esos dos números ya todo queda determinado (pues los que sobren se pondrán en orden para formar la sucesión $a_1,a_2,\ldots,a_7$; por ejemplo, si se escogen el 8 y el 10, la sucesión será $1,2,3,4,5,6,9,7,8,10$).
• Si $a_8=6$, entonces hay 6 posibilidades para escoger a_9 y a_{10}, pues deben ser dos números en $\{7,8,9,10\}$, los cuales son: 3 escogiendo $a_9=7$; 2, escogiendo $a_9=8$; 1 escogiendo $a_9=9$ (esto también puede contarse usando lenguaje de combinaciones y es $\binom{4}{2}$).
• Si $a_8=5$, entonces hay 10 posibilidades para escoger a_9 y a_{10} pues deben ser dos números en $\{6,7,8,9,10\}$, los cuales son: 4 escogiendo $a_9=6$; 3, escogiendo $a_9=7$, etc. (o, en lenguaje de combinaciones, $\binom{5}{2}$).

Así sucesivamente tenemos que el total de posibilidades es:

$$3+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+\cdots+5)+(1+2+\cdots+6)+(1+2+\cdots+7)+$$

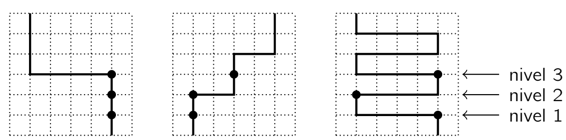
$$+(1+2+\cdots+8) = 3+6+10+15+21+28+36 = 119.$$

(lo cual, en lenguaje de combinaciones es

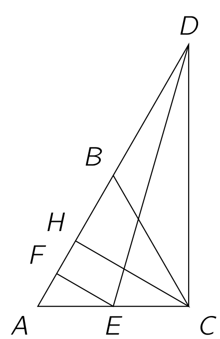
$$\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\cdots+\binom{9}{2}\ ).$$

Segunda forma (para lectores que manejan el lenguaje de las combinaciones). La sucesión queda determinada si se escogen los primeros 7 números (o los últimos 3) y la única elección que no hace a_8 menor que a_7 es $a_i = i$ para toda i. Entonces el número de posibilidades es $\binom{10}{7} - 1 = \binom{10}{3} - 1 = 119$.

Solución 58. Cualquier corte debe pasar por el centro del cuadrado y a partir de ahí ya queda determinado para que las dos figuras que queden sean iguales. También podemos observar que el corte queda determinado por la elección de los tres puntos interiores del cuadrado a los que se llega verticalmente en cada uno de los niveles horizontales 1, 2 y 3. Como la elección de esos tres puntos se puede hacer de $5^3 = 125$ formas, éste es el número de cortes diferentes. Para entender esto mejor damos tres ejemplos en donde se ha marcado con $\bullet$ los puntos mencionados.



Solución 59. Consideremos la siguiente figura en la que H es el punto medio de AB:



Como $\angle ABC = 60^o$, tenemos que $\angle CBD = 120^o$. El triángulo CBD es isósceles, así que $\angle BDC = \angle BCD = \frac{180^o-120^o}{2} = 30^o$. Como en un triángulo los ángulos interiores deben sumar 180^o, para el triángulo ADC obtenemos que $\angle ACD = 90^o$. Entonces los triángulos DFE y DCE son iguales. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ADC tenemos que $|DC| = \sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Entonces $|AF| = |DA| - |DF| = 4 - 2\sqrt{3}$. Por otro lado, como ABC es equilátero y H

es el punto medio de AB, resulta que CH es perpendicular a AB y entonces los triángulos AFE y AHC son semejantes, lo cual nos dice que

$$\frac{|AF|}{|AH|} = \frac{|FE|}{|HC|},$$

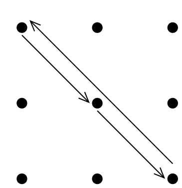
pero, por el teorema de Pitágoras en AHC, vemos que $|HC| = \sqrt{3}$. Entonces

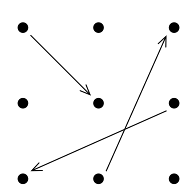
$$\frac{4-2\sqrt{3}}{1} = \frac{|FE|}{\sqrt{3}},$$

de donde $|FE| = 4\sqrt{3}-6$. El área de AFE es

$$\frac{|AF|\cdot|FE|}{2} = \frac{(4-2\sqrt{3})(4\sqrt{3}-6)}{2} = (2-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-6) = 14\sqrt{3}-24.$$

Solución 60. De la primera columna debe salir una flecha; ésta puede salir de cualquiera de los 3 puntos y entonces puede llegar a cualquiera de los 4 puntos que no están en su renglón ni en su columna. Sin pérdida de generalidad supongamos que va de el punto de arriba a la izquierda al punto central (en la segunda columna). Analicemos las tres posibilidades que tiene la flecha que sale de la segunda columna.
(a) No puede salir del primer renglón (pues ya había una flecha que salía del primer renglón).
(b) Si sale del punto central entonces no puede llegar al primer renglón pues esto llevaría a que en el tercer renglón la flecha empezara y terminara ahí, lo cual es imposible; entonces su única posibilidad es que vaya al tercer renglón. En este caso la flecha que sale de la tercera columna debe salir del punto de más abajo y llegar al punto de la primera columna y primer renglón y ésta es una posibilidad (ver la figura de la izquierda).
(c) Si sale del tercer renglón entonces, como antes, no puede llegar a la primera columna (pues la flecha de la tercera columna empezaría y terminaría ahí mismo); entonces debe llegar a la tercera columna y primer renglón; pero entonces la flecha que sale de la tercera columna debe salir del segundo renglón y llegar a la primera columna en el tercer renglón y ésta es otra posibilidad (ver la figura de la derecha). Entonces son $3\cdot4\cdot2 = 24$ posibilidades.





Concentrado de Respuestas

1.	(a)	16.	(e)	31.	(a)	46.	588
2.	(e)	17.	(b)	32.	(d)	47.	32
3.	(a)	18.	(b)	33.	(b)	48.	$\frac{4}{5}$
4.	(c)	19.	(d)	34.	(c)	49.	90
5.	(b)	20.	(d)	35.	(a)	50.	4
6.	(c)	21.	(e)	36.	(e)	51.	4
7.	(c)	22.	(c)	37.	(b)	52.	6
8.	(e)	23.	(d)	38.	(c)	53.	10
9.	(b)	24.	(b)	39.	(c)	54.	32
10.	(d)	25.	(e)	40.	(e)	55.	3
11.	(b)	26.	(c)	41.	(b)	56.	5
12.	(c)	27.	(a)	42.	(d)	57.	119
13.	(d)	28.	(a)	43.	(a)	58.	125
14.	(c)	29.	(a)	44.	(c)	59.	$14\sqrt{3}-24$
15.	(d)	30.	(d)	45.	(b)	60.	24

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas:
Cubículo 201 del Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
C.P. 04510, México, Distrito Federal
Teléfono: (55) 56 22 48 64
Fax: (55) 56 22 54 10
Correo electrónico: omm@ciencias.unam.mx
Sitio Web: www.ommenlinea.org

Búscanos en Facebook

Sigue @ommtw

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

José Antonio Gómez Ortega
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

Irving Daniel Calderón Camacho

Fernando Campos García

José Alfredo Cobián Campos

David Cossío Ruiz

Luis Cruz Romo

José Antonio Climent Hernández

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Samantha Lizette Flores López

Luis Eduardo García Hernández

Luis Miguel García Velázquez

María Eugenia Guzmán Flores

Daniel Perales Anaya

María Luisa Pérez Seguí

Leonardo Martínez Sandoval

Miguel Raggi Pérez

Olga Rivera Bobadilla

Carlos Jacob Rubio Barrios

David Guadalupe Torres Flores

Rogelio Valdez Delgado

Rita Vázquez Padilla

Eduardo Velasco Barreras

Hugo Villanueva Méndez.